Dato un insieme D in $\mathbf{R}$, chiamato *dominio, insieme degli argomenti* e una applicazione univoca di D in un insieme C in $\mathbf{R}$, chiamato *codominio, insieme delle immagini, immagine*, la rappresentazione di D in I si chiama *funzione reale di una variabile reale*. Se x è un elemento di D e y un elemento di C si scrive $y = f(x)$. Gli elementi x (del dominio) si dicono *variabili indipendenti*, mentre i valori y (dell'immagine) si chiamano *variabili dipendenti*. Indichiamo la variabile indipendente con $r, t, x, \ldots$, la funzione con $f, g, h, \ldots$, le costanti e i valori assegnati con un numero oppure $a, b, c, \ldots$, ad esempio scrivendo

$$y = f(x), \quad u = g(r), \quad v(t) = at + v_0, \quad f(\pi) = 1 \quad f(0) = b \quad \ldots$$

Tradotta in una espressione, cioé nel linguaggio dell'algebra, la funzione 'moltiplicare per 3 e sommare 1' si può scrivere come:

$$f : x \mapsto 3x + 1 \quad \text{oppure} \quad f(x) = 3x + 1 \quad \text{oppure} \quad y = 3x + 1.$$

Ognuna di queste scritture è equivalente:

1) $f : x \mapsto 3x+1$ si legge: 'la funzione f tale che a x corrisponde $3x + 1$', oppure 'f manda x in $3x + 1$'.
2) $f(x) = 3x+1$ si legge: 'la funzione f della variabile x è $3x+1$'.
3) $y = 3x+1$ si legge: 'gli elementi y (dell'immagine) si ottengono moltiplicando per 3 gli elementi x (del dominio) e sommando 1'.

L'espressione algebrica della funzione mostra esplicitamente come, dato un elemento x, calcolare la corrispondente immagine. Da questo punto di vista si può assimilare la funzione ad una procedura:

Assegna un valore a x	$x = 5$
Moltiplicalo per 3	$3 \times 5 = 15$
Aggiungi 1	$15 + 1 = 16$
Assegna il risultato a $f(x)$	$f(x) = 16$

Si può anche immaginare una funzione come una *scatola* in cui entra un valore x per la variabile indipendente, su questo si eseguono delle operazioni, e da cui esce $f(x)$, il valore della funzione.

Interessano le funzioni che traducono la corrispondenza tra dominio e codominio con una espressione algebrica e da questo punto di vista il dominio è quell'insieme dei reali in cui si possono ese - guire (cioé sono definite) le operazioni indicate nella espressione algebrica della funzione. Tuttavia spesso accade che si dichiari esplicitamente f definita in un sottoinsieme proprio del suo dominio per così dire 'naturale': questo dipende dal tipo di problema di cui la funzione f è la 'traduzione'. Analogamente è possibile che l'immagine sia un sottoinsieme di $\mathbf{R}$.

Esempi

1. La funzione $y = 3x + 2$ è definita in $\mathbf{R}$ ed è a valori in $\mathbf{R}$. Le operazioni sono possibili per qualsiasi numero reale, e anche gli elementi dell'immagine sono numeri reali.

2. La funzione: $f(x) = \frac{1}{x}$ ha come dominio $\mathbf{R} - \{0\}$ perchè è vietata la divisione per zero. D'altra parte l'immagine è $\mathbf{R} - \{0\}$ perchè non esiste un numero il cui reciproco sia zero.

3. La funzione: $f : x \mapsto \sqrt{x}$ fa corrispondere ad ogni reale non - negativo la sua radice quadrata, un numero non - negativo. Qui la funzione è definita in $\mathbf{R}_0^+$ e anche l'immagine è $\mathbf{R}_0^+$. Il dominio è un sotto - insieme di $\mathbf{R}$ perché l'estrazione di radice è possibile solo quando l'argomento è non - negativo.

4. La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ mette in corrispondenza ogni reale con la sua radice cubica, si tratta di una corrispondenza uno - uno in $\mathbf{R}$. Tuttavia, quando, per esempio, si intende che f rappresenta il lato di un cubo in funzione del volume x, la stessa funzione viene allora definita per $x \geq 0$ ($\mathbf{R}_0^+$).

5. La funzione $f(x) = x^3$ mette in corrispondenza ogni reale con il suo cubo, si tratta di una corrispondenza uno - uno in $\mathbf{R}$.

6. La funzione $f : x \mapsto x^2$ fa corrispondere ad ogni numero reale il suo quadrato. Il dominio è $\mathbf{R}$, l'immagine è $\mathbf{R}_0^+$. Questa funzione è una corrispondenza molti - uno: $(-1)^2 = (+1)^2 = 1$: a due diversi elementi del dominio corrisponde uno stesso elemento dell'immagine.

7. La funzione $y = |x|$ si chiama *modulo* di x e si definisce come:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{per } x \geq 0, \\ -x & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Qui la funzione è definita dalle due funzioni $y = x$ e $y = -x$ in dipendenza dal valore di x. Poiché per ogni x è assegnato un solo y, questa corrispondenza è una funzione. Si tratta di una corrispondenza molti - uno: $|-1| = |+1| = 1$ con dominio $\mathbf{R}$ e immagine $\mathbf{R}_0^+$.

• Con *grafico* di una funzione si intende l'insieme delle coppie $\{(x, y)|x \in \mathbf{R} \cap y = f(x)\}$. Occorre liberarsi dell'idea che il grafico di una funzione sia in generale una curva, ovvero che ad ogni curva del piano corrisponda un'unica funzione.

8. La funzione di Dirichlet

$$f\colon \begin{cases} y = 1 & \text{per } x \text{ razionale} \\ y = 0 & \text{per } x \text{ irrazionale} \end{cases}$$

non rappresenta una curva in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

9. Una curva chiusa, come una circonferenza o un ellisse, oppure la parabola simmetrica rispetto all'asse X, non possono essere rappresentate da un'unica funzione.

10. La funzione $f : x \mapsto x!$ dove $x!$ è il prodotto $1 \cdot 2 \cdots (x-1)x$ ha senso solo quando x è un numero naturale e in tal caso si chiama fattoriale di x.

• Una funzione definita solo su $\mathbf{N}$ si chiama *successione*; i valori della funzione sono indicizzati e si scrive a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ invece di $f(n)$.

11. $a_n = \frac{1}{n}$

12. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

13. $a_n = \frac{n}{n+1}$

Sistemi di coordinate

Tra numeri reali e punti della retta esiste una corrispondenza biunivoca. Occorre fissare un punto di riferimento (l'origine O), un verso e una unità di misura. Allora ad ogni punto (numero reale) corrisponde un solo numero reale (punto). Questo metodo si estende alle due dimensioni del piano, o alle tre dello spazio. Allora esisterà una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano (dello spazio) e le coppie ordinate (x, y) (terne ordinate (x, y, z)).

Particolarmente semplice è il sistema cartesiano ortogonale, formato da due rette perpendicolari dette *assi*. Convenzionalmente si pone l'asse X orizzontale e quello Y verticale. Su entrambi si fissa una stessa unità di misura. (Non necessariamente: nella pratica a ciascun asse può corrispondere una grandezza con unità di misura diverse. Ad esempio il grafico pV della legge dei gas prevede che p coincida con X e che V coincida con Y; non ha senso chiedersi in quale relazione sono le unità di misura di p e di V: queste vengono opportunamente fissate.)

Convenzionalmente gli assi sono orientati nel verso positivo rispettivamente da sinistra a destra e dal basso verso l'alto, ma si possono orientare diversamente anche qui secondo necessità.

Ad ogni punto P del piano corrisponde quindi una coppia ordinata (x, y) di numeri reali, detti *coordinate cartesiane*, che si identificano con le proiezioni del punto P sugli assi X e Y rispettivamente. La quantità x si dice *ascissa* e la quantità y *ordinata*; il punto P è identificato da (x, y) e si scrive $P(x, y)$.

Geometria analitica

Questa fondamentale corrispondenza tra punti e coppie ordinate permette di definire quantità come distanza, punto medio di un segmento, ecc. e luoghi di punti come retta, circonferenza, ecc. in numeri ed equazioni.

Distanza, punto medio di un segmento

La distanza tra due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, cioé la lunghezza del segmento $P_1\,P_2$ si ottiene come applicazione del teorema di Pitagora al triangolo HP_1P_2; è:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{d(x_1, x_2)^2 + d(y_1, y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Per il punto medio $M(x_M, y_M)$ del segmento P_1P_2 si ha:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

estendendo quanto già ottenuto per la retta reale.

Uno spostamento da $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$ si rappresenta con gli *incrementi* Δx e Δy, dove

$$\Delta x = x_2 - x_1, \qquad \Delta y = y_2 - y_1.$$

L'incremento è sempre 'posizione finale − posizione iniziale', ossia la posizione finale x_2 (y_2) si ottiene sommando l'incremento Δx (Δy) alla posizione iniziale x_1 (y_1):

$$x_2 = x_1 + \Delta x, \qquad y_2 = y_1 + \Delta y.$$

• Occorre notare che l'incremento, al contrario della distanza, può essere positivo o negativo. Con gli incrementi la distanza si scrive anche:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Esempi

1. Sono dati i punti $P_1(1, 2)$, $P_2(-3, 4)$. Allora
- $M(\frac{1-3}{2}, \frac{2+4}{2})$, cioè $M(-1, 3)$ è il punto medio,
- $\Delta x = x_2 - x_1 = -3 - 1 = -4$,
- $\Delta y = y_2 - y_1 = 4 - 2 = 2$ sono gli incrementi,
- $d(P_1, P_2) = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{5}$ è la distanza.

2. La circonferenza è definita come il luogo dei punti posti ad una stessa distanza r da un punto fisso, il centro C. L'equa - zione cercata si ottiene dal teorema di Pitagora imponendo che il quadrato della distanza del generico punto $P(x, y)$ dal centro $C(x_0, y_0)$ sia pari a r^2:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Tutti e soli i punti della circonferenza soddisfano questa equazione. Se il centro è nell'origine sarà più semplicemente $x^2 + y^2 = r^2$.

3. L'ellisse è definita come il luogo dei punti $P(x, y)$ tali che la somma delle distanze da due punti fissi, detti *fuochi*, sia costante. Poniamo questa distanza pari a $2a$. Fissati i fuochi sull'asse X, nei punti $F_1(-e, 0)$ e $F_2(e, 0)$, dalla figura risulta $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ e $e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Questa definizione porta, dopo vari calcoli, alla equazione dell'ellisse in coordinate cartesiane

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Chiamiamo a, b *semiassi* dell'ellisse.

• È evidente la somiglianza con l'equazione della circonferenza. Quest'ultima può esser vista come un caso *particolare* dell'ellisse quando i due fuochi coincidono nel centro. Da $a = b$ (cioè $e = 0$) segue $x^2 + y^2 = b^2$.

Grafici elementari

Propedeutica al tracciamento del grafico delle funzioni in generale è la conoscenza dei grafici delle funzioni elementari retta, parabola, radice, ecc.

La retta

Dati due punti $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ con $x_1 \neq x_2$, la quantità

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

si dice *coefficiente angolare* o *pendenza* della retta per P_1P_2.

Si intuisce che m dipende dall'angolo α, e in effetti è $m = \tan\alpha$. Il coefficiente angolare è caratteristico della retta in se' e non dipende dalla particolare scelta dei punti P_1, P_2: infatti un qualsiasi punto $P(x, y)$ per appartenere alla retta deve soddisfare la condizione:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m,$$

dove $P_1(x_1, y_1)$ è un altro punto della retta.

Questo fatto è evidente se si considerano i triangoli simili: per una stessa retta il rapporto tra un qualsiasi incremento Δy e il corrispondente incremento Δx è costante e pari al coefficiente angolare. Allora si può scrivere $\Delta y = m\Delta x$: in generale per le rette l'incre - mento Δy (ovvero Δf) è direttamente proporzionale a Δx e il numero m è appunto il fattore di proporzionalità.

Esempi

1. La funzione *costante* $y = a$ è una retta per cui $m = 0$.

2. $m > 0$: Δx e Δy hanno lo stesso segno. Ad un incremento positivo di x corrisponde un incremento positivo di y e viceversa.

3. $0 < m < 1$: $|\Delta y| < |\Delta x|$: l'ordinata varia meno dell'ascissa.

4. $m = 1$: $\Delta y = \Delta x$, uguali incrementi per x e y.

5. $m > 1$: $|\Delta y| > |\Delta x|$, l'ordinata varia più che l'ascissa.

6. $m < 0$ allora Δx e Δy hanno segni opposti: ad un incremento positivo di x corrisponde un incremento negativo di y, e viceversa.

Alcuni tipi di rette

Dalla condizione di appartenenza di un punto $P(x_1, y_1)$ alla retta si ricava

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y &= mx + \underbrace{y_1 - mx_1}_{q}, \\
y &= mx + q.
\end{aligned}
$$

l'equazione della retta che passa per $P_1(x_1, y_1)$. Essa esprime la relazione in cui stanno le quantità x, y perché il generico punto $P(x, y)$ appartenga alla retta.

- Il numero q si chiama *intercetta* Y ed è l'ordinata del punto in cui la retta taglia l'asse Y. Infatti, se $x = 0$, allora $y = q$
- se $q = 0$ la retta passa per l'origine. L'equazione della retta è $y = mx$ ed esprime la proporzionalità diretta tra x e y.
- La retta di equazione $y = x$ si chiama *funzione identità.*
- Si dice *lineare* una funzione per cui è:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{e} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Da questa definizione si ricava $f(0) = 0$, quindi le funzioni lineari sono le rette che passano per l'origine.

Occorre insistere sulla grande importanza pratica che la relazione di proporzionalità diretta ha nella vita di tutti i giorni: nella descrizione di fenomeni fisici, chimici, economici, ecc. (le così dette 'leggi') il modello che si incontra più frequentemente usa una relazione di proporzionalità diretta tra 'causa' ed 'effetto'. In tal modo è doppio l'effetto di una causa doppia, e gli effetti di più cause si sommano come se vi fosse una unica causa pari alla somma delle cause. Questo importante principio di sovrapposizione fu espresso per la prima volta da G. Galilei.

Esempi

Le rette $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$ sono:

1. la stessa retta quando $m = m'$ e $q = q'$, tutti i punti sono in comune;

2. parallele (nessun punto in comune), quando $m = m'$ e $q \neq q'$; fissato m, cioè fissata una *direzione*, tutte le rette ad essa parallele si ottengono variando q nell'equazione

$$y = mx + q.$$

Chiamiamo l'insieme di queste rette *fascio improprio* di rette.

3. incidenti (un punto in comune) quando $m \neq m'$. Le rette sono perpendicolari quando $mm' = -1 \iff m' = -\frac{1}{m}$. Fissato un punto, l'insieme delle rette che passano per quel punto si ottiene facendo variare m nell'equazione

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

della retta per il punto (x_1, y_1). Chiamiamo l'insieme di queste rette *fascio proprio* di rette.

4. Il coefficiente angolare m non è definito per le rette parallele all'asse Y ($\Delta x = 0$!!), ovvero l'equazione $y = mx + q$ può rappresentare, con opportuni valori per m e q, tutte le rette *tranne* quelle parallele all'asse Y.

Definendo una retta parallela all'asse Y come il luogo dei punti che hanno una stessa ascissa a (l'ordinata è qualsiasi), l'equazione della retta si scrive:

$$x = a, \qquad (a \text{ costante}).$$

Con $x = 2$ indichiamo la retta parallela all'asse Y per $x = 2$. Il luogo dei punti tali che $x = 0$ è l'asse Y. Per indicare l'asse Y scriviamo allora $x = 0$.

5. Analogamente una retta parallela all'asse X è il luogo dei punti che hanno una stessa ordinata b; l'equazione della retta sarà:

$$y = b, \qquad (b \text{ costante}).$$

Allora $y = 0$ rappresenta l'asse X.

6. Scrivere la retta passante per i punti $P_1(3, -4)$, $P_2(-5, 4)$. In che relazione è la retta data con la retta $y = -x + 3$? È $m = \frac{4-(-4)}{-5-(+3)} = \frac{8}{-8} = -1$, $q = -4 - (-1)3 = -1$. La retta cercata è $y = -x - 1$. I coefficienti angolari sono uguali ($m = m' = -1$), ma $-1 \neq 3$, le rette sono parallele.

7. Scrivere la retta che passa per l'origine e il punto $P(-1, 2)$. È $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+2}{-1} = -2$, quindi la retta è $y = -2x$.

8. Scrivere la retta che passa per il punto $P(2,1)$ ed è parallela alla retta $y = 3x - 2$.

È $m = 3$, allora $y = 3x + q$, si deve trovare q. Poiché la retta passa per P è anche $1 = 3 \cdot 2 + q$, ovvero $q = -5$. La retta è $y = 3x - 5$.

9. Scrivere la retta che passa per il punto $P(2,1)$ ed è perpendicolare alla retta $y = 3x - 2$.

È $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{3}$, allora $y = -\frac{1}{3}x + q$, si deve trovare q. Poiché la retta passa per P è anche $1 = -\frac{1}{3} \cdot 2 + q$, ovvero $q = -\frac{5}{3}$. La retta è $y = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$.

10. In che punto si incontrano le rette $y = 2x - 1$ e $y = -x + 2$?

Il punto di incontro deve essere *comune* alle due rette: allora $2x - 1 = -x + 2$, che risolta dà $x = 1$, da cui $y = 1$ e $P(1,1)$.

11. In quali punti la retta $y = 2x + 3$ taglia gli assi X e Y?

L'asse X corrisponde a $y = 0$, allora si ha $0 = 2x + 3$, che risolta dà $x = -3/2$.

L'asse Y corrisponde a $x = 0$, allora si ha $y = 3$.

Equazione generale della retta

Esiste una forma generale per l'equazione di una retta:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{con} \quad a, b \quad \text{non entrambi nulli.}$$

Al variare di a, b, c si ha:

- $a = 0,\ b \neq 0$: $y = -\frac{c}{b}$, una retta $\parallel$ all'asse X; se $c = 0$ allora $y = 0$, l'asse X.
- $b = 0,\ a \neq 0$: $x = -\frac{c}{a}$ una retta $\parallel$ all'asse Y, se $c = 0$ allora $x = 0$, l'asse Y.
- $c = 0$ e $b \neq 0$, $y = -\frac{a}{b}x = mx$, una retta per l'origine.
- $abc \neq 0$, allora $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}y = mx + q$, dove $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$.

- Un'altra utile forma per l'equazione di una retta si ottiene quando si suppongano noti i punti in cui la retta incontra gli assi (forma segmentaria). Ad esempio la retta incontra l'asse X in $x = a$ e l'asse Y in $y = b$. Allora l'equazione della retta per questi due punti si scrive come

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Altri grafici elementari

Valore assoluto o modulo. La funzione $f(x) = |x|$ è definita come:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{per } x \geq 0, \\ -x & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il grafico di questa funzione coincide con quello della retta $y = x$ per $x \geq 0$, con quello della retta $y = -x$ per $x < 0$, il che si può vedere come il ribaltamento rispetto all'asse X della retta $y = x$ per $x < 0$. L'andamento del grafico della più generale funzione $y = a|x|$ dipende da a. Alcuni esempi con diversi valori per a sono in figura. Si noti come il grafico risulti simmetrico rispetto all'asse X per i corrispondenti valori positivi/negativi dati ad a.

Iperbole. Come le rette passanti per l'origine esprimono la proporzionalità diretta, così la proporzionalità inversa $xy = c$ è espressa dall'iperbole $y = \frac{c}{x}$. Poniamo $c = 1$, allora $y = \frac{1}{x}$. Risulta di aiuto per tracciare il grafico una tabella di valori da cui naturalmente viene escluso $x = 0$, dove la funzione non è definita.

x	-1	-0.5	-0.2	$\ldots$	0.2	0.5	1	2	4
$\frac{1}{x}$	-1	-2	-5	$\ldots$	5	2	1	0.5	0.25

Riportando questi punti e collegandoli si ottiene il grafico della iperbole equilatera $y = \frac{1}{x}$. Questo passa per i punti $P(1,1)$ e $P'(-1,-1)$, è simmetrico rispetto al centro $O(0,0)$, e anche rispetto alla bisettrice $y = x$ del 1° quadrante. Ancora si può scrivere più in generale $y = \frac{a}{x}$ (esempi in figura).

Parabola. Il grafico della funzione $y = x^2$ si ottiene con l'aiuto della tabella:

x	-2	-1	-0.5	0	0.7	1	$\sqrt{2}$	2	3
y	4	1	0.25	0	0.49	1	2	4	9

Il grafico è simmetrico rispetto all'asse Y, il vertice della parabola sta in $O(0,0)$. Se scriviamo in generale $y = ax^2$ allora il caso appena visto corrisponde ad $a = 1$. I grafici di questa funzione per diversi valori di a sono dati in figura.

Operazioni

Due funzioni f, g si possono sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere, escludendo in quest'ultimo caso i punti in cui eventualmente la funzione al denominatore si annulla. Il dominio della funzione così ottenuta è quel sottoinsieme di $\mathbf{R}$ comune ai domini delle funzioni f, g.

Esempi

Siano $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 1$; il dominio è $\mathbf{R}$ per entrambe. Con le quattro operazioni si ottengono le funzioni:

1. $f + g = x^2 + x - 1$, con dominio $\mathbf{R}$.

2. $f - g = x^2 - x + 1$, con dominio $\mathbf{R}$.

3. $f \cdot g = x^2(x - 1) = x^3 - x^2$, con dominio $\mathbf{R}$.

4. $\dfrac{f}{g} = \dfrac{x^2}{x-1}$, *non* definita in $x = 1$ perché lì il denominatore si annulla ($g(1) = 0$), e la divisione non si può eseguire, quindi il dominio è $\mathbf{R} - \{1\}$

Famiglie di funzioni

A partire dalle funzioni elementari $f(x) = x$ (identità) e $f(x) = c$ (costante) si ottengono con le operazioni $+, \times$ tutta una famiglia di funzioni che vanno sotto il nome di polinomi e di funzioni razionali.

Esempi

1. $f(x) = ax$, retta per l'origine, a coefficiente angolare.

2. $f(x) = ax + b$, retta qualsiasi, b intercetta Y.

3. $f(x) = x \cdot x = x^2$, parabola centrata sull'asse Y, $f(1) = 1$.

4. $f(x) = ax^2$, parabola, $f(1) = a \quad (a \neq 0)$.

5. $f(x) = ax^2 + b$, parabola traslata di b unità lungo Y.

6. $f(x) = x \cdot x \cdots x = x^n$, funzione potenza n - esima.

7. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, un polinomio di grado n in x.

8. $f(x) = \frac{1}{x}$, iperbole equilatera.

9. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, è l'andamento delle forze fondamentali gravitazionale ed elettrica.

10. $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$, una funzione razionale.

Composizione

Per le funzioni si definisce una ulteriore operazione, che non ha equivalente nei numeri, detta *composizione*. La composizione si indica con '$\circ$', come $f \circ g$, oppure si scrive $f\big(g(x)\big)$.

Possiamo figurare una funzione come una scatola con un ingresso e una uscita, mentre all'interno vi è una descrizione delle operazioni da eseguire.

La composizione consiste nel porre due (o più) funzioni 'in cascata': l'uscita dell'una è l'ingresso dell'altra. Allora la funzione *composta* $f \circ g$ corrisponde a calcolare *prima* g e usare il risultato come valore di ingresso per f; al contrario $g \circ f$: si calcola prima f e poi si usa il risultato come ingresso per g.

In generale *non* si ottiene lo stesso risultato: la composizione, al pari della sottrazione e divisione, è una operazione per cui *non* vale la proprietà commutativa.

Esempi

1. Date due funzioni definite come:
$f(x) = x + 1$, 'sommare 1 a x';
$g(x) = x^2$, 'fare il quadrato di x'.
Allora si ha:

$f \circ g(x)$ $\qquad\qquad$ $g \circ f(x)$

$x = 2$ $\qquad$ $x = 2$
$g(2) = 2^2 = 4$ $\qquad$ $f(2) = 2 + 1 = 3$
$f(4) = 4 + 1 = 5$ $\qquad$ $g(3) = 3^2 = 9$

Non si ottiene lo stesso risultato per le due funzioni composte, e l'esempio mostra che in generale $f \circ g \neq g \circ f$. Si può scrivere esplicitamente il risultato della composizione come una nuova funzione:

$$h(x) = f \circ g = x^2 + 1 \qquad \text{e} \qquad H(x) = g \circ f = (x + 1)^2.$$

Dalla espressione algebrica di $h(x)$ e $H(x)$ appare chiaro che per la composizione non vale la proprietà commutativa.

2. Sono date le due funzioni $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$. Si consideri la funzione composta $f(g(x)) = \sqrt{x^2}$. I valori di $f \circ g$ per alcuni valori sono:

$x = 0$ $\qquad$ $g(0) = 0^2 = 0$ $\qquad$ $f(0) = 0$
$x = -3$ $\qquad$ $g(-3) = (-3)^2 = 9$ $\qquad$ $f(9) = \sqrt{9} = 3$
$x = 3$ $\qquad$ $g(3) = 3^2 = 9$ $\qquad$ $f(9) = \sqrt{9} = 3$

Esaminando la corrispondenza tra gli insiemi si identifica la funzione composta $y = \sqrt{x^2}$ con la funzione $y = |x|$.

- Quindi $\sqrt{x^2}$ è l'espressione algebrica equivalente a $|x|$.

Riflessioni

La composizione di una funzione $f(x)$ con $g(x) = -x$ corrisponde alla riflessione del grafico della funzione rispetto all'asse Y. Questa funzione si scrive quindi $f(-x)$.

Nelle figure si mostrano i grafici così ottenuti per le funzioni
1) $f(x) = x + 1$,
2) $f(x) = \sqrt{x}$,
e si confrontano gli andamenti di $f(x)$ e $f(-x)$ per una generica funzione $f(x)$.

- Attenzione a non confondere la riflessione del grafico rispetto all'asse Y con la riflessione rispetto all'asse X: quest'ultima si ottiene con $-f(x)$.

Traslazioni

La composizione di una funzione $f(x)$ con $g(x) = x - a$ corrisponde ad una traslazione rigida del grafico di f di a unità in direzione X.

Esempi

1. $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 1$; $f \circ g = (x-1)^2$. Il grafico di f viene traslato rigidamente di una unità a destra dell'origine. Il vertice della parabola, cioé il punto in cui $f(x) = 0$, da $x = 0$ diviene $x = 1$.

2. $f(x) = x^3$, $g(x) = x + 1$ la composizione trasla il grafico di $f(x)$ di una unità verso sinistra (figura).

• Invece sommare una costante c ad $f(x)$ corrisponde a traslare rigidamente il grafico di c unità nella direzione dell'asse Y. Ogni punto $P(x, f(x))$ del grafico di f diviene $P'(x, f(x) + c)$. Ciò è equivalente alla sostituzione $y \to y - y_0$ quando $y_0 = c$.

Da questo punto di vista si possono allora rivedere le funzioni elementari, ricavando per esse espressioni più generali.

Modulo

Per questa funzione il grafico coincide con quello della retta $y = x$ per $x \geq 0$ e con quello della retta $y = -x$ per $x < 0$. La traslazione del vertice in $V(x_v, y_v)$ si ottiene con la sostituzione $x \to x - x_v$ e sommando y_v a $f(x)$.

3. Trasliamo la $y = |x|$ in $P(3,1)$. È $y = |x - 3| + 1$.

4. Tracciare il grafico di $y = |2x + 3| - 1$. Si riscrive come $y = 2|x + \frac{3}{2}| - 1$, ponendo in evidenza $a = 2$. Allora il grafico di $2|x|$ è traslato nel punto $(-\frac{3}{2}; -1)$.

Parabola

L'equazione generale della parabola si ottiene a partire da $y = ax^2$ con la traslazione del vertice V da $O(0,0)$ in $V(x_v, y_v)$.

$$y - y_v = a(x - x_v)^2$$
$$y = ax^2 + \underbrace{-2ax_v}_{b}\, x + \underbrace{ax_v^2 + y_v}_{c}$$
$$y = ax^2 + bx + c \tag{7}$$

dove x_v, y_v sono le cordinate del vertice V (figura). L'ascissa del vertice vale $-\frac{b}{2a}$.

5. Traslare la parabola $y = x^2$ in $P(2, -1)$.
Si ottiene $y = (x - 2)^2 - 1$, cioé $y = x^2 + 4x + 3$.

6. Tracciare il grafico della parabola $y = -2x^2 + 4x$.
Si può riscrivere come $y = -2(x^2 - 2x)$ raccogliendo $a = -2$. *Completando* il quadrato in parentesi come

$$y = -2(x^2 - 2x + 1 - 1) = -2(x - 1)^2 + 2$$

la parabola $y = -2x^2$ risulta traslata nel punto $(1, 2)$.

• Completando il quadrato e fattorizzando *qualunque* parabola si può scrivere come una parabola traslata rispetto all'origine.

Iperbole

L'equazione generale dell'iperbole si ottiene a partire da $y = \frac{a}{x}$ con la traslazione del centro di simmetria dall'origine $O(0,0)$ in $S(x_s, y_s)$.

$$y - y_s = \frac{a}{x - x_s} \rightarrow y = \frac{\overbrace{a - y_s x_s}^{q} \overbrace{+y_s}^{p} x}{x - x_s} \rightarrow \frac{px + q}{x - x_s}$$

dove x_s, y_s sono le cordinate del centro di simmetria S (figura).

7. Nella figura l'iperbole viene traslata in $P(1,1)$. Qui è $p = 0$ e $q = 1$.

8. Tracciare il grafico di $y = \frac{x+2}{2x+1}$.
Occorre dapprima riscrivere

$$y = \frac{x + 2}{2x + 1} = \frac{\frac{x}{2} + 1}{x + \frac{1}{2}}$$

dividendo per 2 numeratore e denominatore: allora $S(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; si trova $a = \frac{3}{4}$. L'iperbole $y = \frac{3}{4x}$ è stata traslata nel punto S.

Cambiamenti di scala

La composizione di una funzione $f(x)$ con $g(x) = ax$ corrisponde ad una cambiamento di scala per l'asse X.

- **Oss.** Nei cambiamenti di scala per l'asse X $(g(x) = f(ax))$ il punto $P(0, f(0))$ rimane fisso poiché $g(0) = f(a0) = f(0)$.

Ben diverso è l'effetto che si ottiene moltiplicando f per una costante $a \neq 0$: qui il cambiamento di scala riguarda l'asse Y. Nelle figure si confrontano gli effetti di queste diverse operazioni.

- **Oss.** Qui restano fissi i punti x_i tali che $f(x_i) = 0$, cioè i punti in cui il grafico di f attraversa l'asse X.
- Parabola e iperbole sono figure simili a se stesse, ovvero si ottiene la parabola $y = ax^2$ applicando una *similitudine* di ingrandimento $\frac{1}{a}$ alla parabola $y = x^2$. Analogamente l'iperbole $y = \frac{a}{x}$ si ottiene a partire da $\frac{1}{x}$ come similitudine con ingrandimento $\sqrt{a}$. Quindi tutte le parabole (iperboli) sono repliche in scala di una stessa parabola (iperbole).

Simmetrie

Il grafico di una funzione *pari* è simmetrico rispetto all'asse Y, mentre il grafico di una funzione *dispari* è simmetrico rispetto all'origine O. Formalmente si dice che una funzione è

- pari quando $f(-x) = f(x)$, mentre
- dispari quando $f(-x) = -f(x)$.

Ad esempio sono:

- PARI (figure)

1) $f(x) = c \rightarrow f(1) = c = f(-1)$, costante;
2) $g(x) = |x| \rightarrow g(3) = |3| = |-3| = g(-3)$, modulo;
3) $h(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow h(\frac{1}{2}) = 4 = h(-\frac{1}{2})$, potenza;
4) $p(x) = x^4 \rightarrow p(2) = 16 = (-2)^4 = p(-2)$, potenza;

- DISPARI (figure)

1) $f(x) = -2x \rightarrow f(-1) = -2 = -f(1)$, una retta;
2) $g(x) = x^3 \rightarrow g(-2) = -8 = -g(2)$, una parabola cubica;
3) $h(x) = \frac{}{x} \rightarrow h(-3) = -\frac{1}{3} = -h(1)$, iperbole;
3) $p(x) = x|x| \rightarrow p(-3) = -9 = -p(3)$

Inoltre:

- la somma algebrica di due o più funzioni pari (dispari) è una funzione pari (dispari); nelle figure

1) $y = x^4 - x^2$, pari;
2) $y = x^3 - x$, dispari
3) $y = x^2 - \frac{1}{x^2}$, pari;
4) $y = x + \frac{1}{x}$, dispari.

- la somma algebrica di funzioni pari e dispari è una funzione non - pari, non - dispari; nelle figure

1) $y = \frac{1}{2}(x + |x|)$;
2) $y = x^2 - x$;
3) $y = x^2 + \frac{1}{x}$;
4) $y = x^3 + x^2$.

- il prodotto/divisione di due funzioni pari/dispari è una funzione con parità come dalla tavola; nelle figure

1) $y = \frac{2x}{1+x^2}$;
2) $y = \frac{1}{1+x^2}$;

Riassumendo:

- sono pari le funzioni - potenza x^{2n}, con esponente pari, e dispari le funzioni x^{2n+1}, con esponente dispari;
- vi sono funzioni ne' pari ne' dispari:
- vi sono semplici regole per determinare la *parità* di funzioni ottenute con operazioni tra funzioni pari e/o dispari.

Stabilire se il grafico di una funzione è o meno simmetrico rispetto all'asse Y o all'origine, è una utile informazione sull'andamento della funzione. Ad esempio, accertato che la funzione è pari, ci si limiterà a tracciarne il grafico per $x \geq 0$ poiché il grafico per $x < 0$ è la riflessione di questo rispetto all'asse Y.

Positività e zeri

Interessa spesso sapere se e dove una funzione si annulla, cioé se e dove il grafico incontra l'asse X. Questi punti si dicono *zeri*; essi sono le soluzioni reali, se esistono, dell'equazione $f(x) = 0$. Naturalmente può essere che $f(x) = 0$ non abbia soluzioni reali, oppure che non si sappia come risolvere l'equazione.

Analogamente interessa sapere dove la funzione è positiva (negativa), ovvero dove il grafico sta al di sopra (al di sotto) dell'asse X. Quest'altra condizione si esprime imponendo che $f(x) > 0 \quad (f(x) < 0)$.

• Si possono combinare queste due condizioni e cercare gli intervalli, se esistono, tali che $f(x) \geq 0$.

Esempi

1. $f(x) = 3x + 2$. Da $3x + 2 \geq 0$ si ricava $x \geq -\frac{2}{3}$. Nella figura il grafico di $f(x)$: per i punti a destra di $x = -\frac{2}{3}$ l'ordinata ($y = f(x)$) è positiva e il grafico sta sopra l'asse X, in $x = -\frac{2}{3}$ la retta taglia l'asse, più a sinistra la funzione assume valori negativi, e il grafico sta sotto l'asse X.

2. $f(x) = x^2 - 2x$. Via algebrica: si pone $x^2 - 2x \geq 0$, cioé $x(x-2) \geq 0$, cioé $x \leq 0$ e $x \geq 2$.

Si ottiene lo stesso risultato tracciando i grafici di $y = x^2$ e di $y = 2x$. Si cercano gli intervalli per cui $x^2 \geq 2x$. Questi risultano immediatamente dal grafico.

3. $f(x) = 1 - |x|$. Si tracciano i grafici di $y = |x|$ e $y = 1$. È $1 - |x| \geq 0 \rightarrow |x| \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$.

• In altri casi le cose sono un po' più complicate.

4. $f(x) = x - \sqrt{x}$. Si pone $x - \sqrt{x} \geq 0 \rightarrow x \geq \sqrt{x}$. Si risolve quest'ultima disequazione algebricamente, imponendo prima che $x \geq 0$; allora $x^2 \geq x \rightarrow x \geq 1$. Oppure si possono tracciare i grafici di $f_1 = x$ e $f_2 = \sqrt{x}$ sullo stesso sistema di assi. I grafici si intersecano in $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$, inoltre il grafico di x sta sopra quello di $\sqrt{x}$ a partire da $x = 1$.

5. $f(x) = x^3 - x^2$. Si pone $x^3 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^3 \geq x^2$. Tracciati i grafici, si vede che $f(x) = 0$ per $x_{1,2} = 0$, $x_3 = 1$ e $f(x) > 0$ per $x > 1$.

Disequazioni

Questo procedimento appena visto, utile per trovere gli zeri e la positività della funzioni, diventa un metodo grafico per risolvere le disequazioni quando si sia raggiunta una certa confidenza con i grafici delle funzioni elementari.

Esempi

1. $|x| < \sqrt{2}$, sol. $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.
2. $(x-1)^2 > 2$ sol. $1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$.
3. $|x+1| \geq |x-1|$ sol. $x \geq 0$.
4. $x^2 - x > -2 \quad \forall x$.
5. $\sqrt{x} > \frac{1}{x}$ sol. $x > 1$.
6. $|x-1| > |2x-1|$ sol. $0 < x < \frac{2}{3}$.
7. $\sqrt{x+1} \geq x$ sol. $0 \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Proprietà delle funzioni

Funzioni iniettive

Si intendono funzioni tali che, comunque si prendano x_1, x_2 con $x_1 \neq x_2$, sia $f(x_1) \neq f(x_2)$, ovvero tali che ad ogni valore y è associato un solo valore x. Si tratta di una corrispondenza uno - uno tra dominio e immagine.

$$\forall x_1, x_2, \quad x_1 \neq x_2 \quad \text{è} \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Esempi

1. $f(x) = 3x + 1$ è iniettiva.

2. $f(x) = \frac{1}{x}$ è iniettiva.

3. $f(x) = x^2$ non è iniettiva. Si ha infatti

$$f(-2) = (-2)^2 = 4 = 2^2 = f(2).$$

4. $f(x) = |x|$ non è iniettiva: anche qui

$$f(-1) = |-1| = |1| = f(1).$$

• **Oss.** Il grafico di una funzione iniettiva incontra una retta parallela all'asse X in un solo punto.

Funzioni limitate

Questa proprietà si riferisce alle caratteristiche dell'insieme - immagine. Si dice che questo insieme è superiormente (inferiormente) limitato, e cioé che la funzione $f(x)$ è *superiormente* (*inferiormente*) *limitata* quando esiste un numero M (rispettivamente m) tale che, comunque si prenda x, sia $f(x) \leq M$ (ovvero $f(x) \geq m$).

Questa proprietà afferma che il grafico di $f(x)$ sta tutto al di sotto (al di sopra) della retta $y = M$ ($y = m$).

La funzione si dice poi senz'altro *limitata* quando valgono entrambe le limitazioni e cioé quando esiste un numero positivo M tale che, comunque si prenda x, valga $|f(x)| \leq M$.

$$\forall x \; \exists M \; : \; |f(x)| \leq M \, .$$

Questo equivale a dire che il grafico della funzione sta tutto in una fascia ampia 2M centrata sull'asse X.

Esempi

1. $f(x) = x^2$ è limitata inferiormente, essendo $x^2 \geq 0$:

2. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ è superiormente limitata perché $f(x) < 0,\ \forall x$.

3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ è limitata poiché $0 < f(x) \leq 1$. Qui $f(0) = 1$ e al crescere di x la funzione assume valori positivi decrescenti.

4. $f(x) = x$ e $f(x) = \frac{1}{x}$ non sono limitate, nel senso appena visto sopra.

Massimi e minimi

Quando una funzione è superiormente limitata ed esiste un x per cui vale $f(x) = M$, allora x si dice un punto di *massimo assoluto* per f. Analogamente per una funzione inferiormente limitata quando esiste un x tale che $f(x) = m$, allora si dice che x è un punto di *minimo assoluto*.

L'esistenza del massimo e/o minimo assoluti dipendono da due cose:
1) il fatto che vi sia la limitazione superiore e/o inferiore;
2) il fatto che esista un x tale che $f(x)$ sia uguale alla limitazione.

Esempi

1. $f(x) = x^2$ ha minimo assoluto in $x = 0$ essendo $f(0) = 0$.

2. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ non ha massimo poiché la limitazione superiore vale 0, ma non vi è un valore di x per cui sia $f(x) = 0$.

3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ ha massimo in $x = 0$, infatti $f(0) = 1$, mentre non ha minimo, poiché la limitazione inferiore vale 0, ma non vi è un valore di x tale che $f(x) = 0$.

4. $f(x) = 2x - 1$, definita in $[1, 3]$ ha massimo in $x = 3$ e minimo in $x = 1$ (è monotona crescente!).

5. $f(x) = x$ e $f(x) = \dfrac{1}{x}$ non sono limitate, e non hanno né massimo né minimo assoluti.

• Oltre al massimo e minimo assoluti, possono esistere intervalli che contengono un punto $x = p$ tale che $f(p) \geq f(x)$ (rispettivamente $f(p) \leq f(x)$) comunque si prenda $x \neq p$ nell'intervallo dato. Questi punti si dicono *massimo* (ovvero *minimo*) *locale o relativo*. Si dicono locali perché i punti di massimo e minimo sono tali relativamente ai punti vicini a $x = p$. Da questo punto di vista i massimi e minimi assoluti sono allora anche relativi.

Esempi

1. $y = x^3 - 3x$. Il grafico mostra un massimo e un minimo relativi.

2. $y = 2x^2 - 3x + 1$, definita in $[0, 2]$, possiede:
- un massimo assoluto in $(2, 3)$;
- un minimo assoluto in $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8})$;
- un massimo relativo in $(0, 1)$.

Monotonia

Con funzione *monotona crescente* (oppure *decrescente*) in senso stretto si intende una funzione tale che per ogni

$$x_2 > x_1 \quad \text{sia} \quad f(x_2) > f(x_1) \quad (\text{rispettivamente} \quad f(x_2) < f(x_1))$$

ovvero si abbia ($\Delta x \neq 0$!):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \quad (\text{rispettivamente} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0).$$

Una funzione tale che per ogni

$$x_2 > x_1 \quad \text{sia} \quad f(x_2) \geq f(x_1) \quad (\text{rispettivamente} \quad f(x_2) \leq f(x_1))$$

si dice *non-decrescente* (rispettivamente *non-crescente*).

Esempi

1. $f(x) = x$ è strettamente crescente $\forall x$.

2. $f(x) = -3x$ è strettamente decrescente $\forall x$.

3. $f(x) = x^3$, $g(x) = x^5$ sono crescenti $\forall x$; in generale una funzione $f(x) = x^n$ con n dispari è monotona crescente.

4. $f(x) = \sqrt{x}$ è strettamente crescente in $\mathbf{R}_0^+$.

5. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è decrescente per $x < 0$ e per $x > 0$, ma *non* è descrescente in un intervallo che comprenda l'origine: $f(1) = 1 > f(-1)$.

6. La funzione $y = -1$ è non-crescente, non-decrescente $\forall x$.

7. La funzione $y = x + |x|$ è non-crescente per $x \leq 0$.

- La nozione di monotonia si applica anche a intervalli: allora *localmente*, in quell'intervallo la funzione è crescente, ...

8. $f(x) = x^3 - 3x$ è
crescente per $x < -1$,
decrescente per $-1 < x < 1$,
crescente per $x > 1$.

- In alcuni casi funzioni che non sono monotone diventano monotone quando si restringa il loro dominio ad un opportuno sottoinsieme. Il sottoinsieme del dominio si chiama *restrizione*.

9. $f(x) = x^2$ è crescente per $x \geq 0$, decrescente per $x \leq 0$, la restrizione di f a $x \geq 0$ è monotona crescente.

10. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ è monotona decrescente per $x > 0$

Funzioni inverse

Si consideri una funzione f tale che ad ogni valore y dell'immagine di f corrisponda un solo valore x del dominio, quindi una corrispondenza uno - uno. Si dice *funzione inversa* di f la funzione che esprime questa corrispondenza e si scrive f^{-1}. Le funzioni iniettive (e in particolare quelle strettamente monotone) sono invertibili: data $f(x)$ esiste la funzione inversa $f^{-1}(x)$ tale che se $f(a) = b$ sia $f^{-1}(b) = a$. Poiché $b = f(a)$ allora $f^{-1}(f(a)) = a$, dalla composizione di una funzione con la funzione inversa si ottiene la funzione identica: $f^{-1} \circ f(x) = f \circ f^{-1}(x) = x$. Occorre però ricordare che il dominio di f^{-1} è l'immagine di f, mentre l'immagine di f^{-1} è il dominio di f.

I grafici di una funzione e dell'inversa sono simmetrici rispetto alla retta $y = x$. Questo fatto si può esprimere dicendo che un punto $P(x, y)$ del grafico di f viene mandato nel punto $P'(y, x)$ del grafico di f^{-1} e viceversa. L'espressione esplicita della funzione inversa si ottiene risolvendo (quando ciò è possibile !!) per x l'equazione $y = f(x)$ e poi scambiando tra loro i simboli delle variabili x e y.

Esempi

1. La funzione inversa di $y = x$ è ancora $y = x$: tutti i punti di questa retta rimangono uniti.

2. Sia $y = 2x + 1$, si risolve per x:

$$2x = y - 1 \rightarrow x = \tfrac{1}{2}(y - 1),$$

la funzione inversa è $y = \frac{1}{2}(x-1)$. Verifichiamo per qualche valore: $f(2) = 2\cdot2+1 = 5$ e $f^{-1}(5) = \frac{1}{2}(5-1) = \frac{4}{2} = 2$; $f(0) = 0\cdot2+1 = 1$ e $f^{-1}(1) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$.

3. Sia $f(x) = \dfrac{1}{x}$, risolvendo per x è: $x = \dfrac{1}{y}$ e quindi la funzione inversa è ancora $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$. Verifichiamo con la composizione: $f \circ f^{-1} = \dfrac{1}{1/x} = x$.

4. La funzione razionale $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ è iniettiva, quindi invertibile (si tratta di una iperbole traslata nel punto $S(2, 1)$). Si risolve per x:

$$\begin{aligned} xy - 2y &= x + 1 \\ xy - x &= 1 + 2y \\ x(y-1) &= 1 + 2y \\ x &= \frac{2y+1}{y-1}. \end{aligned}$$

ovvero $f^{-1} = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Esaminiamo dominio e immagine di f, f^{-1}. È $\mathrm{Dom(f)} = \mathbf{R} - \{2\} = \mathrm{Img(f^{-1})}$ e $\mathrm{Img(f)} = \mathbf{R} - \{1\} = \mathrm{Dom(f^{-1})}$.

• Funzioni che non sono invertibili perché non iniettive, divengono iniettive e quindi invertibili quando il loro dominio per così dire 'naturale' venga ristretto ad un opportuno sottinsieme.

5. La funzione $f(x) = x^2+1$ non è invertibile se viene definita in $\mathbf{R}$ perché non iniettiva. Tuttavia se restringiamo a $\mathbf{R}_0^+$ il dominio, allora la funzione $f^\star(x) = x^2+1$ così definita è iniettiva e ammette la funzione inversa ottenuta risolvendo per la x:

$$x^2 = y-1 \to x = \sqrt{y-1}, \quad \text{ovvero} \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x-1},$$

con dominio $x \in \mathbf{R}|x \geq 1$ e immagine $\mathbf{R}_0^+$.

6. La funzione - radice $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ è definita come funzione inversa della funzione - potenza $g(x) = x^n$, pur di restringere il dominio di quest'ultima a $\mathbf{R}_0^+$.

• **Oss.** Per n dispari ha senso considerare la funzione - radice definita anche per $x < 0$, cioé su $\mathbf{R}$ (ad esempio $\sqrt[3]{x}$). Tuttavia, poiché vi sono contraddizioni quando si trattano esponenti razionali, si conviene di considerare *solo* funzioni $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ in $\mathbf{R}_0^+$.

7. Componendo funzioni potenza e radice si ottengono funzioni con esponente razionale:

$$x^{1/m} \circ x^n = x^n \circ x^{1/m} = (x^n)^{1/m} = (x^{1/m})^n = x^{n/m}.$$

Ordinamento delle funzioni

Le funzioni potenza e radice sono crescenti per $x > 0$. Esaminando l'andamento di queste funzioni (figure) si ottiene:

$$x > x^2 > x^3 > \ldots > x^n > x^{n+1}, \quad \text{per } 0 < x < 1,$$

mentre

$$x < x^2 < x^3 < \ldots < x^n < x^{n+1}, \quad \text{per } x > 1.$$

Al contrario, sempre tenendo la retta $y = x$ come riferimento

$$\sqrt[n]{x} > \ldots > \sqrt[3]{x} > \sqrt{x} > x, \quad \text{per } 0 < x < 1,$$

mentre

$$\sqrt[n]{x} < \ldots < \sqrt[3]{x} < \sqrt{x} < x, \quad \text{per } x > 1.$$

Allora, per $0 < x < 1$ valgono le disuguaglianze

$$\sqrt[n]{x} > \ldots > \sqrt[3]{x} > \sqrt{x} > x > x^2 > x^3 \ldots > x^n,$$

mentre per $x > 1$ valgono le

$$\sqrt[n]{x} < \ldots < \sqrt[3]{x} < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3 < \ldots < x^n.$$

Esercizi

1) Dopo aver segnato il punto $P(a, b)$ trovare il punto:
- simmetrico di P rispetto all'asse X
- simmetrico di P rispetto all'asse Y
- simmetrico di P rispetto all'origine degli assi
- simmetrico di P rispetto alla bisettrice del 1∘, 3∘ quadrante.
- simmetrico di P rispetto alla bisettrice del 2∘, 4∘ quadrante.
- simmetrico di P rispetto alla retta $y = -1$
- simmetrico di P rispetto alla retta $x = 3$
- simmetrico di P rispetto alla retta $y = 2x - 3$

I valori per a, b sono dati in tabella

a	1	-1	0	1	3	$\sqrt{2}$	2	$\pi/2$	$-\pi$
b	2	2	1	0	-2	-1	1	$-\sqrt{2}$	0

2) Ricavare delle espressioni generali per ciascuno degli esercizi precedenti considerando un generico $P(x, y)$.

3) Dati i punti $P(1, 2)$, $Q(0, -5)$, $R(-2, -3)$, $S(-1, 4)$, considerare tutte (quante sono?) le coppie di punti PQ, PR, ... Per ciascuna coppia trovare:
- Δx, Δy, distanza e punto medio.
- Scrivere le equazioni delle rette per le coppie di punti.
- Quali di queste rette sono incidenti, quali parallele ?

4) Scrivere l'equazione delle rette *parallela* e *perpendicolare* alla retta s per il punto P.

P	$(0, 1)$	$(1, -1)$	$(-3, -2)$	$(2, 3)$	$(-5, 4)$
s	$x = -1$	$y = 2$	$y = 2x + 1$	$y + x = 1$	$y = 3x - 2$

5) Dati due punti P, Q determinare le coordinate di altri due punti R, S allineati con P e Q.

P	$(0, 1)$	$(2, -1)$	$(-3, -2)$	$(2, 3)$	$(-5, 4)$
Q	$(1, 0)$	$(1, 2)$	$(5, 4)$	$(4, -3)$	$(-1, -2)$
R	$(2, \_\_)$	$(\_\_, -2)$	$(1, \_\_)$	$(\_\_, -2)$	$(3, \_\_)$
S	$(\_\_, 2)$	$(-1, \_\_)$	$(\_\_, -4)$	$(-1, \_\_)$	$(\_\_, 1)$

6) Dati i punti $P(1, 2)$, $Q(3, 1)$, trovare un terzo punto $R(x, y)$ tale che il triangolo PQR sia
- isoscele;
- equilatero;
- rettangolo in P oppure in Q.

7) Dati i punti $P(-1, 2)$, $Q(2, 3)$ trovare i punti R, S tali che $PQRS$ sia:
- un quadrato;
- un rettangolo con i lati in proporzione $1 : 2$.
- In quest'ultimo caso quante sono le soluzioni possibili?

8) Disegnare su uno stesso sistema di assi (per poterne confrontare l'andamento) i grafici di $y = a|x|$, variando a. Ad esempio porre $a = \pm 1$, ± 2, ± 3 ± 4, oppure $a = \pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1.

9) Lo stesso per le parabole $y = ax^2$.

10) Ancora per le iperboli $y = \frac{a}{x}$.

11) Tracciare i grafici approssimati delle funzioni.

- $\frac{1}{2}(x + |x|)$, $x^2 - |x|$,
- $x + \frac{1}{x^2}$, $x^2 + \frac{1}{x}$,
- $\frac{1}{1+x}$, $\frac{x}{1+x}$, $\frac{x^2}{1+x^2}$

12) Scrivere l'equazione delle funzioni $y = a|x|$ traslate nei punti:

- $P_1(1, 3)$, $P_2(-2, 3)$, $P_3(1, -3)$, $P_4(-1, -4)$

13) Scrivere l'equazione delle parabole $y = ax^2$ traslate nei punti:

- $P_1(2, 5)$, $P_2(-3, 2)$, $P_3(3, -1)$, $P_4(-5, -2)$

14) Scrivere l'equazione delle iperboli $y = \frac{a}{x}$ traslate nei punti:

- $P_1(2, 1)$, $P_2(-1, 2)$, $P_3(3, -2)$, $P_4(-2, -3)$

15) In che punto è stata traslata la funzione?

- $y = |x + 2|$, $y = |3x + 1|$, $y = |3 - 2x|$.
- $y = x^2 - 5x + 6$, $y = 3x^2 - 9x + 2$,
- $y = \frac{x-1}{x+2}$, $y = \frac{2x+1}{x-2}$, $y = \frac{2x+3}{3x+2}$.

16) Tracciare i grafici approssimati delle funzioni composte.

- $1 - |x|$, $|1 - |x||$, $|1 - |1 - |x|||$.
- $|x^2 - 2x|$, $|x^3 - 3x + 1|$.
- $\sqrt{|x|}$, $\sqrt{x + 1}$, $\sqrt{1 + |x|}$, $\sqrt{x^2 + 1}$.
- $\frac{1}{1+|x|}$

17) Per ciascuna funzione elencata mostrare se è o meno iniettiva; in caso che non sia iniettiva indicare una opportuna restrizione del dominio in cui sia iniettiva; trovare quindi la funzione inversa.

- $y = 2x - 3$,
- $y = (x - 1)^2$,
- $y = (x + 1)^2 - 3$.
- $y = \dfrac{1}{x^2}$.
- $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

Funzioni circolari

Misura di angoli e archi

Storicamente il grado sessagesimale, l'unità con cui comunemente si misurano gli angoli, deriva dalla durata dell'anno, 365 giorni, arrotondata dai Babilonesi in 360 parti, ciascuna ampia appunto $1°$.

Questa unità risulta tuttavia inutilizzabile in Analisi, dove si opera con i numeri reali. e l'unità di misura degli angoli è un numero reale. Dato un angolo sOv, su di esso con centro in O si tracciano archi di circonferenza di varia apertura. Le figure così ottenute sono simili e il rapporto tra le lunghezze degli archi e le rispettive aperture (raggi) è costante e dipende solo dall'angolo α. Si assume questo rapporto, indipendente dall'arco di circonferenza considerato, come misura dell'angolo α e si scrive senz'altro

$$\alpha = \frac{AP}{OA} \quad [\mathrm{rad}].$$

Il radiante (rad) è una unità del Sistema Internazionale (SI). Si tratta di una quantità *adimensionale*: è infatti il rapporto tra due lunghezze. Per definizione l'angolo di un radiante corrisponde ad un arco lungo quanto un raggio.

Estendendo il ragionamento a una intera circonferenza, il rapporto tra la circonferenza e raggio è $\frac{C}{r} = 2\pi\,\mathrm{rad}$ e i noti angoli della geometria elementare, angolo giro , piatto e angolo retto misurano rispettivamente 2π, π, $\pi/2$ (rad). Altri angoli si costruiscono facilmente con riga e compasso e si possono poi ulteriormente suddividere per bisezione.

Alcune corrispondenze tra le due notazioni sono qui a fianco.

Esempi

1. La figura piana OAP delimitata dall'arco AP e dai raggi OA, OP si chiama *settore circolare*. Dalla definizione data per l'angolo α si calcola la lunghezza dell'arco AP come $AP = \alpha r \quad (\alpha \text{ in rad})$.

2. Sui meridiani la lunghezza dell'arco di $1°$ è pari a $\frac{\pi}{180} R_T$, dove $R_T \approx 6\,370$ km è il raggio medio della Terra. Allora l'arco di $1°$ è lungo approssimativamente $111\,\mathrm{km}$ ($\frac{\pi}{180} \approx 0.0174$).

- Questo ragionamento funziona per un solo parallelo. Quale?

3. L'area del settore circolare si calcola analogamente all'area $\frac{1}{2}bh$ di un triangolo: qui l'arco $AP = \alpha r$ è la base e $OA = r$ l'altezza del 'triangolo'. Allora l'area del settore circolare, in funzione dell'angolo α, è:

$$A = \tfrac{1}{2} AP \cdot OA = \tfrac{1}{2}\alpha r \cdot r = \tfrac{1}{2}\alpha r^2 \,.$$

Per il cerchio $\alpha = 2\pi$, allora $A = \frac{1}{2} 2\pi r^2 = \pi r^2$.

4. L'area di un settore circolare ampio $\frac{2}{3}\pi$ $(120°)$ e di raggio $r = 10\,\mathrm{cm}$ è $S = 10^2 \frac{\pi}{3} \approx 105\,\mathrm{cm}^2$.

• La rettificazione della circonferenza, cioè la valutazione del rapporto, indicato con π, tra le lunghezze della circonferenza e del diametro è un problema millenario.

Pigreco, π, è quindi un numero importante e speciale: i greci stimavano $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$; nel Seicento si trovarono formule per calcolarne lo sviluppo decimale; nell'Ottocento è stata dimostrata la sua natura di irrazionale trascendente. Il valore a 8 decimali è $\pi = 3.14159265\ldots$, la frazione $\frac{355}{113}$ dà le prime sei cifre decimali esatte. Attualmente, grazie a nuove e potenti metodi, sono state calcolate molti miliardi di cifre di π.

Trigonometria

Esempi

1. Gli antichi agrimensori Egizi avevano il problema di ristabilire i confini delle terre coltivabili dopo le annuali piene del Nilo. Si accorsero che potevano formalizzare il procedimento in modo da risolvere il problema in generale. Si può scomporre qualsiasi figura piana in un insieme di opportuni triangoli, e, a patto di saper calcolare efficientemente l'area dei triangoli, il problema è risolto.

Riferendosi al generico triangolo ABC sia CH l'altezza di C rispetto a AB, sia α l'angolo in A (figura). Per applicare la formula:

$$\text{area } = \tfrac{1}{2}\,\text{base} \times \text{altezza} = \tfrac{1}{2}\, AB \times CH,$$

occorre conoscere l'altezza. Questa si ricava indirettamente misurando l'angolo α e il lato AC e consultando una tabella dei rapporti tra altezza e lato per i vari angoli; calcolati una volta per tutte questi rapporti, le operazioni procedono in modo spedito e sicuro. Con poche varianti questo metodo viene usato tuttora.

Il rapporto $\frac{HC}{AC}$ tra altezza e lato si chiama *seno* dell'angolo α e si scrive $\sin\alpha$. Allora $HC = AB \sin\alpha$

2. Convenzionalmente la pendenza delle strade viene indicata in percentuale e come tale compare nei cartelli di pericolo. La strada si può schematizzare come un piano, inclinato di un certo angolo α. Allora dire che la pendenza è del 3% significa che ogni 100 metri di strada percorsa la quota si abbassa (o alza) di 3 metri e che la variazione della quota è direttamente proporzionale alla distanza percorsa con quella pendenza. La costante di proporzionalità è $\frac{BH}{AB} = \frac{3}{100} = 0.03$. Questa costante è il seno di α.

3. La lunghezza di un parallelo terrestre dipende dalla *latitudine*, cioè dall'angolo di elevazione rispetto all'equatore; questo è $0°$ all'equatore e $90°$ ai poli; il raggio del parallelo è la proiezione del punto P sul raggio per l'equatore. La grandezza della proiezione in rapporto al raggio si chiama *coseno* di α e si scrive $\cos\alpha$.

4. L'illuminazione di una superficie è massima quando i raggi luminosi giungono su di essa perpendicolarmente. Se i raggi sono obliqui, l'energia che cade (ad esempio su $1\,\mathrm{m}^2$) viene distribuita su una superficie di area maggiore e l'illuminazione risulta minore. Riferendosi alla figura è $\frac{\ell}{\ell'} = \cos\alpha \to \ell' = \ell/\cos\alpha$ a cui segue $S' = \frac{S}{\cos\alpha}$. Se l'illuminazione è inversamente proporzionale all'area illuminata, da

$$I \propto \frac{E}{S} \quad \text{segue} \quad I' \propto \frac{E}{S'} = \frac{E}{S}\cos\alpha = I\cos\alpha.$$

Quindi l'illuminazione è proporzionale al coseno dell'angolo di incidenza (legge di Lambert).

Seno e coseno

Le quantità $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ dipendono dall'angolo α e sono dei numeri reali. Per fissare le idee tracciamo una circonferenza centrata nell'origine O di un sistema di assi ortogonali, siano A, B i punti di intersezione dei semiassi positivi X, Y con la circonferenza. Numeriamo i quadranti dal $1°$ al $4°$ in senso antiorario. Si segni un punto P sulla circonferenza. Sia H il piede della perpendicolare da P a OA e α l'angolo AOP contato positivo in senso antiorario. Allora nella figura è:

$$\sin\alpha = \frac{PH}{OP,} \qquad \cos\alpha = \frac{OH}{OP},$$

ovvero altezza e proiezione di P su OA misurate tenendo come unità di misura il raggio OA . Prendendo la circonferenza di raggio unitario, $OA = 1$, le coordinate in funzione di α di un punto P che sta sulla circonferenza sono $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$.

Seno e coseno variano al variare della posizione di P sulla circonferenza, ma è evidente la periodicità: i valori di $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ si ripetono ad ogni 'giro'. Si dice che seno e coseno sono funzioni *periodiche* di periodo $\mathrm{T} = 2\pi$, ovvero

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha + 4\pi) = \ldots = \sin(\alpha + 2k\pi)$$

In generale si scrive:

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Allora per il calcolo di seno e coseno ogni angolo viene riportato all'intervallo $[0, 2\pi]$.

- Seno e coseno sono *limitati* e valgono le diseguaglianze:

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1\,, \quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

ovvero

$$|\sin\alpha| \leq 1\,, \quad |\cos\alpha| \leq 1, \quad \forall\alpha.$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo OHP si ha:

$$HP^2 + OH^2 = OP^2 \ \rightarrow \ \frac{HP^2 + OH^2}{OP^2} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

relazione fondamentale vera per ogni α. Applicando ancora il th. di Pitagora a particolari triangoli rettangoli (una volta metà di un triangolo equilatero e l'altra metà di un quadrato) si ricavano i valori di seno e coseno per gli angoli pari a $\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}$ $(30°,\ 45°,\ 60°)$.

- $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = 0.500 \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$
- $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707 \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$
- $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866 \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = 0.500$

Poniamo $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, ($P$ nel 1° quadrante), allora dalle simmetrie di P rispetto agli assi X e Y si ricavano seno e coseno di $(-\alpha)$, 4° quadrante e di $(\pi - \alpha)$, 2° quadrante. È:

- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha.$

La simmetria centrale (rispetto a O) trasporta P nel 3° quadrante, allora:

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha \qquad \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha.$$

Il risultato è che per qualsiasi α diverso da $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ il calcolo di $\sin\alpha, \cos\alpha$ è ricondotto al calcolo nel 1° quadrante.

Calcolo numerico di seno e coseno per un angolo qualsiasi

Si può far di meglio: dato un qualsiasi triangolo rettangolo, siano a il cateto opposto all'angolo α e b il cateto opposto all'ango - lo β, c l'ipotenusa. È

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha = \cos\beta, \qquad \frac{b}{c} = \sin\beta = \cos\alpha,$$

ma è $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ e allora

$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha, \qquad \sin(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha,$$

riducendo così l'ampiezza dell'intervallo a $\frac{\pi}{4}$ (45°).

- Allora si calcoleranno con metodi numerici efficienti i valori di seno e coseno soltanto nell'intervallo $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$: è ciò che è stato fatto dai compilatori delle tavole numeriche e che si fa nei calcolatori, tascabili e non.

Tangente

Una quantità importante che deriva da seno e coseno è la *tangente* definita come

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

geometricamente interpretabile come il rapporto $\frac{AT}{OA}$, dove AT è il segmento staccato dal prolungamento di OP sulla retta parallela all'asse Y passante per A; ma i triangoli OHP e OAT sono simili e allora ... oppure come il rapporto tra le grandezze del cateto opposto all'angolo α e il cateto adiacente in un triangolo rettangolo.

Se analogamente a quanto fatto per seno e coseno si considerano le simmetrie rispetto agli assi X e Y e al centro O si ha:

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha, \quad \tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha, \quad \tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha,$$

ovvero $\tan\alpha = \tan(\alpha + k\pi) \quad k = 0, \pm1, \pm2, \dots$ la tangente ha pe - riodo π. La tangente assume valori in tutto $\mathbf{R}$; alcuni valori sono

$$\tan\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577 \quad \tan\tfrac{\pi}{4} = 1 \quad \tan\tfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} \approx 1.732$$

Si definisce anche il reciproco della tangente, la *cotangente*

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Vale la relazione

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})}{\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha$$

- Tra α, $\sin\alpha$ e $\tan\alpha$ esiste una importante diseguaglianza:

$$\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha, \qquad \text{per } 0 < \alpha < \tfrac{\pi}{2}$$

Si dimostra considerando i triangoli OAP, OAT e il settore circolare OAP; le relative superfici sono contenute l'una nell'altra. Le aree allora sono nella relazione

$$A_{\triangle OAP} < A_{OAP} < A_{\triangle OAT} \;\; \rightarrow \;\; \tfrac{1}{2}r^2\sin\alpha < \tfrac{1}{2}r^2\alpha < \tfrac{1}{2}r^2\tan\alpha$$

da cui semplificando ...

Algebra di seno, coseno, tangente

Le funzioni seno, coseno, tangente *NON* sono lineari, *NON* vale cioè $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \sin\beta$ (per esempio!).

Di aiuto nella risoluzione delle equazioni trigonometriche sono le formule dette di *addizione* che qui vengono date senza dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\sin\beta,\\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,\\
\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\,\tan\beta}.
\end{aligned}$$

Conseguenza immediata delle formule sopra sono le formule dette di *duplicazione*:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Con queste formule si possono calcolare le funzioni angolari per angoli pari a $2\alpha, 4\alpha, \ldots$ e $\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{4}, \ldots$ quando esse siano note per un angolo α.

Esistono altre formule, ad esempio per trasformare somme in prodotti, ma con il calcolatore tascabile sono meno importanti di un tempo, quando erano disponibili solo le tavole numeriche.

Esempi

1. Calcolare $\sin 15°$ come $\sin 15° = \sin(45° - 30°)$.

$$\sin 15° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1).$$

2. Riscrivendo $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ si ha

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \to \sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}};$$

allora

$$\sin 15° = \sqrt{\frac{1 - \cos 30°}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

- Mostrare che le due espressioni per $\sin 15°$ si equivalgono.

Funzioni inverse ed equazioni

Le funzioni seno, coseno, tangente sono definite in $\mathbf{R}$ e sono manifestamente non invertibili essendo periodiche, tuttavia diventano invertibili se definite in una opportuna restrizione, dove siano monotone:

$$\sin x,\ x \text{ in } [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]; \qquad \cos x,\ x \text{ in } [0, \pi]; \qquad \tan x,\ x \text{ in }]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[$$

Queste restrizioni permettono di definire le funzioni inverse:

$$\arcsin x,\ x \text{ in } [-1, 1]; \quad \arccos x,\ x \text{ in } [-1, 1]; \quad \arctan x,\ x \in \mathbf{R}$$

con cui si risolvono le equazioni trigonometriche, definite come quelle equazioni in cui l'incognita x compare *soltanto* come argomento di una (o più) funzioni circolari.

Le equazioni hanno per soluzione: $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

$\sin x = a$	$x = \arcsin a + 2k\pi$,	$x = \pi - \arcsin a + 2k\pi$
$\cos x = a$	$x = \arccos a + 2k\pi$,	$x = -\arccos a + 2k\pi$
$\tan x = a$	$x = \arctan a + k\pi$	(la tangente ha periodo π)

Esempi

1. Risolvere $2\cos x = \sqrt{3}$.
   È: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, segue $x = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2k\pi$.
   Allora $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

2. Risolvere $4\sin x\cos x = \sqrt{2}$.

$4\sin x\cos x = 2\cdot 2\sin x\cos x = 2\sin 2x = \sqrt{2}$, da cui $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ora $2x = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \vee \frac{3}{4}\pi, \pm 2k\pi$, e quindi $x = \frac{\pi}{8} \vee \frac{3}{8}\pi, +k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

- $a \vee b$ si legge 'a oppure b'

3. Risolvere $\cos x + \sin x = 1$.

Poiché $|\sin x| \leq 1$, $\cos x| \leq 1$, $\forall x$, le soluzioni sono nel 1° quadrante dove seno e coseno sono entrambi non negativi. Si eleva al quadrato: $\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x = 1$, ovvero $\sin x\cos x = 0$, con soluzioni $\sin x = 0 \vee \cos x = 0$, ovvero $x = 0 \vee \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

- Casi più complessi si devono forzatamente ricondurre a questi elementari che sono i soli effettivamente risolubili.

Equazioni come: $a\sin x + b\cos x = c$ si possono riportare ai casi qui sopra per mezzo delle utili relazioni:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

4. Risolvere $2\sin x + \cos x = 1$.

$$2\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} + \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = 1$$

$$4\tan\tfrac{x}{2} + 1 - \tan^2\tfrac{x}{2} = 1 + \tan^2\frac{x}{2}$$

ovvero $2\tan\frac{x}{2} = \tan^2\frac{x}{2} \to \tan\frac{x}{2}(\tan\frac{x}{2} - 2) = 0$ cioè: $\tan\frac{x}{2} = 0$ e $\tan\frac{x}{2} = 2$. Le soluzioni sono $x = 0$ e $x = 2\arctan 2$ entrambe con periodicità $2k\pi$. È $2\arctan 2 \approx 2.2\,\text{rad}$ ovvero 127°.

In altri tipi di equazione l'incognita x compare come argomento di funzioni angolari e *anche* come termine a sé stante (polinomio in x); per esempio: $\sin x = x - 1$; queste equazioni si dicono trascendenti e in generale la ricerca delle soluzioni si fa con metodi approssimati.

Risoluzione di triangoli

Risolvere un triangolo significa ricavare le misure dei tre lati e dei tre angoli. Gli elementi noti devono essere in questo caso *almeno* tre, di cui uno *deve* essere un lato (perché?).

Sia dato un triangolo di lati a, b, c rispettivamente opposti agli angoli α, β, γ. Importante è il *teorema dei seni*:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \quad \text{ovvero} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R\,.$$

dove R è il raggio del cerchio circoscritto al triangolo.

Esempi

1. Sia $a = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ $\beta = \frac{\pi}{4}$. È:
$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \to b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \approx 14.1.$
E' anche $\gamma = \pi - (\alpha + \beta) = \frac{5\pi}{12}$, e allora:
$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \to b = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \approx 9.66$

2. Sia $a = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ $b = 7$. È:
$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha \to \beta = \arcsin(\frac{b}{a}\sin\alpha) \approx$
E' ancora $\gamma = \pi - (\alpha + \beta) = $ ecc.

• Nel caso di una triangolo rettangolo le cose si semplificano perché se c è l'ipotenusa, allora $\gamma = \frac{\pi}{2}$ e $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

3. Si vuole calcolare l'altezza di una montagna. Si misura in due punti A, B l'angolo α (ripettivamente β) sotto cui è visto dalla pianura il punto C. Se la distanza AB è nota, ad esempio $AB = 2$ km, allora si ha
$\gamma = \beta - \alpha \qquad 48° - 30° = 18°$
$BC = AB\,\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 2 \cdot \frac{0.5}{0.31} \approx 3.2$ km
$CH = BC\sin\beta = AB\,\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} \approx 3.2 \cdot 0.5 = 1.6$ km.

• Assai utile è anche il *teorema del coseno*, una generalizzazione ad un triangolo qualsiasi del teorema di Pitagora. È, con i soliti nomi per lati e angoli, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ (figura).

4. Si vuole calcolare la lunghezza di un cavo teso tra i punti A e C attraverso un bosco. È noto l'angolo $\beta = 45°$ sotto cui da B sono visti A e C e le distanze $CB = 3.5$ km, $AB = 2.5$ km. Sia x la distanza AC. Si ottiene subito
$x^2 = a^2+c^2-2ac\cos\beta = 12.25+6.25-3.5\cdot2.5\cdot0.71 \approx 12.3\ldots$
da cui $x \approx 3.5$ km.

Funzioni e grafici

I grafici delle funzioni $\sin x$, $\cos x$ si tracciano ricordando che:

- le funzioni sono periodiche con periodo $\mathrm{T} = 2\pi$;
- le funzioni sono limitate: $-1 \leq \sin x, \ \cos x \ \leq 1$;
- $\sin(-x) = -\sin x$, seno e tangente sono funzioni dispari;
- $\cos(-x) = \cos x$, coseno è una funzione pari;
- x si misura in radianti e così va riportato sull'asse X.

Tracciati i grafici sul medesimo sistema di assi si nota come seno e coseno sono 'sfasati' di $\frac{\pi}{2}$: infatti $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$.

Il grafico della tangente è sostanzialmente diverso: la tangente ha periodo $\mathrm{T} = \pi$ e diviene illimitata al tendere dell'angolo ai valori $\frac{\pi}{2} + k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, che, annullando il coseno al denominatore, fanno sì che per tali valori la funzione $\tan x$ non sia definita. Allora le rette $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ sono asintoti verticali per $\tan x$.

L'andamento di seno e tangente nei punti di intersezione con l'asse X si approssima a quello della bisettrice del 1° quadrante; allora intuitivamente $\sin x, \tan x \approx x$ per $x \to 0$,

I grafici delle funzioni inverse arcsin, arccos, arctan si tracciano sfruttando la simmetria rispetto alla retta $y = x$ e vengono dati qui a coppie con quelli delle funzioni sin, cos, tan nelle già viste opportune restrizioni.

Funzioni periodiche

Si dicono periodiche funzioni per cui vale

$$f(x + nT) = f(x), \quad n \in \mathbf{N},\ T \text{ periodo.}$$

Le funzioni circolari sono certamente periodiche, ma evidentemente non sono le *uniche* funzioni per cui vale la definizione: ad esempio, sono periodiche anche le funzioni i cui grafici sono in figura. In effetti la condizione di periodicità non specifica la 'forma' della funzione.

Mutuando i termini dalla musica, chiamiano *fondamentale* ad esempio $\sin x$ e *armoniche* $\sin 2x$, $\sin 3x, \ldots$ Uno dei risultati più notevoli dell'Analisi di fine 1800 è il teorema di Fourier che afferma la possibilità di rappresentare qualsiasi funzione periodica come somma (infinita, una serie) della fondamentale e delle sue armoniche, ciascuna presa con un opportuno coefficiente. In altre parole, se f è periodica, per essa si può scrivere

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx + b_k \cos kx.$$

- Ad esempio, la funzione definita come

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{per } \pi < x < 2\pi \end{cases},$$

sviluppata in serie di Fourier, contiene solo le armoniche dispari

$$f(x) = \sin x + \tfrac{1}{3} \sin 3x + \tfrac{1}{5} \sin 5x + \ldots$$

Costruiamo un grafico approssimato come 'somma' di grafici.

Evidentemente aggiungendo termini il grafico in prossimità di $0,\ \pi,\ 2\pi$ diventa più 'ripido', mentre i tratti compresi tra questi punti si 'spianano'. La possibilità di sviluppare in serie di Fourier qualsiasi funzione periodica è un mezzo potente nell'analisi delle vibrazioni meccaniche, del suono, dei fenomeni elettrici, ecc.

Solo in condizioni ideali le vibrazioni meccaniche hanno andamento sinusoidale; più spesso questo è distorto e/o smorzato. L'analisi armonica stabilisce in questo caso i pesi (l'importanza) della fondamentale e delle armoniche .

Tutto ciò si può vedere anche in un altro modo: è possibile *sintetizzare* una qualsiasi forma d'onda miscelando opportunamente la fondamentale e le sue armoniche. Le applicazioni spaziano quindi dalla musica elettronica alle vibrazioni elastiche delle strutture. Un esempio si ha nei controlli non distruttivi delle strutture, anche antiche.

Un'onda d'urto (shock-wave), cioé un fronte ripido ottenuto con un apposito martello, si propaga nel solido. Velocità di propagazione e attenuazione delle varie componenti armoniche (raccolte da un microfono) danno informazioni sulla struttura interna.

Esercizi

1. Il miglio nautico è definito come l'arco di 1' (un minuto d'arco) sullo stesso meridiano. Quanto è lungo in metri ?

2. Quanta strada in più percorre la ruota esterna rispetto a quella interna di un automobile che curva di 36° ($\frac{\pi}{5}$). La distanza tra le ruote è di circa 1.5 m.

3. Trovare la sezione di un arco di muratura di apertura $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, raggio minore 1 m, raggio maggiore 1,3 m.

4. Supponiamo che nella misura di un certo angolo α si commetta un errore $\Delta\alpha$ di 1°. Quale sarà la corrispondente incertezza $\Delta\ell$ sulla lunghezza dell'arco se $r = 100$ m, oppure $r = 1$ km ?

Come vanno le cose con le stesse distanze se $\Delta\alpha$ vale rispettivamente $1'$ oppure $1''$?

5. Un arco di $1'$ ($\frac{1}{60}$ di 1°) sulla superficie terrestre, verso Nord o Sud, misura un miglio nautico. A quale latitudine Nord un $1'$ d'arco verso Est o Ovest misura $\frac{1}{2}$ miglio ?

6. In funzione del raggio R del cerchio circoscritto, trovare il lato del poligono regolare di 8 (ottagono) e 12 lati (dodecagono).

7. Scrivere le espressioni per il lato, il perimetro e l' area di un poligono di n lati inscritto in un cerchio di raggio r.

8. L'angolo di ripresa di un certo obiettivo fotografico è 60°. Si vuole fotografare la facciata lunga 15 metri di un edificio. A che distanza minima sull'asse della facciata bisogna disporre la macchina fotografica perché questa 'entri' nella fotografia per intero?

9. Se guardo il cornicione di un edificio mentre sono ad una distanza di 20 m dalla sua base lo vedo sotto un angolo di 60°. Quanto è alto l'edificio?

10. $\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ è: a)$2\sin\frac{\alpha}{4}$ b)$\frac{1}{2}\sin\alpha$ c)$\cos\alpha$ d)$\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

11. Elencare le combinazioni di 3 dei 6 elementi di un triangolo qualsiasi (3 lati e 3 angoli) che permettono di risolvere il triangolo.

12. Analogamente per un triangolo rettangolo.

13. Tracciare i grafici approssimati delle funzioni.

- $1 - \sin x$, $\sin x + \cos x$, $2\cos x$, $\cos 2x$.
- $|\sin x|$, $\sin|x|$, $|\cos x|$, $\cos|x|$, $\tan|x|$.
- $\sin(1 - x)$, $\cos(1 + x)$, $e^x \sin x$.

Esponenziali e logaritmi

Esempi

1. Una palla che rimbalza riduce l'altezza di ogni rimbalzo ad una frazione di quella del precedente. Se viene lasciata a cadere da un metro e il primo rimbalzo è a 70 cm ($\frac{7}{10}$ di 1 m), il secondo sarà a 49 cm ($(\frac{7}{10})^2$), il terzo a $\approx$ 34 cm ($(\frac{7}{10})^3$), il quarto a $\approx$ 24 cm, ($(\frac{7}{10})^4$), ... L'altezza in funzione del numero di rimbalzi si scrive allora:

$$h(n) = h_0 \left(\frac{7}{10}\right)^n \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

dove h_0 è l'altezza iniziale. La successione

$$1,\ 0.7,\ 0.7^2,\ 0.7^3\ \ldots$$

è una *progressione geometrica*. Il rapporto costante

$$\frac{h(n+1)}{h(n)} = 0.7 = q$$

si chiama *ragione* della progressione.

• Questo tipo di andamento introduce gli esponenziali, espressioni del tipo a^x, quando si pensi a situazioni in cui la variabile discreta n è sostituita da una quantità continua x.
Le funzioni scritte come:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x,\ 2^x,\ e^x,\ 10^x, \quad \textit{in generale } a^x, \text{ con } a > 0$$

si dicono funzioni esponenziali. La funzione $f(x) = e^x$ è la funzione esponenziale naturale o semplicemente esponenziale. Il dominio delle funzioni esponenziali è $\mathbf{R}$ e il codominio è $\mathbf{R}^+$.

2. In condizioni favorevoli la popolazione di una cultura batterica raddoppia ogni ora. Quale è la popolazione dopo 12 ore, supponendo che all'inizio vi fossero solo 100 batteri?

In questo caso dopo un'ora vi sono $100 \times 2 = 200$ batteri, dopo un'altra ora essi sono $200 \times 2 = 400 = 100 \times 2^2$, dopo tre ore $800 = 100 \times 2^3$ e così via. Appare evidente che la popolazione cresce come 100×2^n, dove n è il numero di ore trascorse; alla fine vi sono circa 4×10^5 batteri. Se si lasciano passare altre 12 ore, allora vi saranno circa 1.7×10^9 batteri, un numero enorme.

Questo fenomeno va sotto il nome di *crescita esponenziale*. Anche la crescita della popolazione umana è soggetta a questo andamento, anche se il tasso annuo di crescita si misura in parti percentuali. Tuttavia, in termini di raddoppio in soli 40 anni la popolazione umana è passata da 3 a 6 milardi di individui. D'altra parte c'è chi ha calcolato come, in assenza di fattori regolanti, da una sola coppia di moscerini si avrebbe in breve tempo una discendenza in grado di riempire l'intero sistema solare!

- La velocità di crescita dipende dal numero di batteri già presenti: inizialmente dopo un'ora vi sono solo 100 batteri in più, mentre alla fine tra l'undicesima e la dodicesima ora aumentano di $\approx 2 \times 10^5$!

Analogamente, in economia il capitale è il classico esempio di una quantità che cresce rispetto al tempo con una velocità che dipende dal valore che ha in quel momento. Il tasso di interesse è espresso come una percentuale riferita al tempo (di solito un anno), cioé:

$$\text{tasso di interesse} = \frac{\Delta C}{C}\frac{1}{\Delta t} \qquad (\%/\text{anno})\,.$$

Quindi la velocità di accrescimento del capitale è:

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = Ck, \quad \text{dove } k = \text{tasso di interesse}\,.$$

La quantità ΔC si chiama *rendita* (annua) del capitale C e ovviamente, a parità di tasso di interesse, è proporzionale al capitale impegnato

3. Per il prezzo di un certo prodotto industriale vale la tabella:

$n°$ pz	1–9	10–99	100–999	1 000 +
euro/pz.	0,50	0,45	0,41	0,38

Volendo tradurre la tabella in un grafico, cioè riportarvi il prezzo in funzione del numero di pezzi, appare evidente come una scala lineare per l'asse X sia del tutto *inadeguata*. Infatti l'intervallo 1–9 risulta piccolissimo rispetto allo spazio che è necessario riservare per l'intervallo 100–999. Se si assegna però lo *stesso* spazio per ciascun intervallo, come mostrato nella tabella, il grafico risulta ben leggibile.

1–10 $\to$ 1–2,
10–100 $\to$ 2–3,
100–1 000 $\to$ 3–4
1 000+ $\to$ 4+

- Una scala con tale andamento si dice *logaritmica*.

4. La risposta fisiologica dell'orecchio umano al suono è di tipo *logaritmico*. Ciò significa che suoni con potenza P (l'intensità della sorgente) in rapporto $1 : 10$, $1 : 100$, $1 : 1\,000$,... producono una percezione (nervosa) come $1 : 2$, $1 : 3$, $1 : 4, \ldots$

• Proprio perché la risposta dell'orecchio è logaritmica possiamo percepire e sopportare sorgenti sonore di potenza in rapporto $1 : 10^{12}$, da un sussurro al martello pneumatico, una dinamica incredibile! Per tenere conto di questo comportamento dell'orecchio umano in tutti gli apparecchi che riproducono il suono, radio, amplificatori, ecc. il controllo del 'volume' è logaritmico e viene anche detto 'fisiologico'.

L'intensità dei suoni e del rumore si misura in dB (deciBel). Per l'orecchio si fissa la soglia di udibilità alla percezione del lieve fruscio delle foglie di un bosco in un giorno senza vento e si pone questo livello pari 0 dB.

Si fissa questa potenza come unità e si misura la potenza della sorgente in esame rispetto a questo livello di riferimento:

$$\begin{aligned}\text{livello in dB} =&10 \log_{10} \frac{\text{potenza della sorgente da misurare}}{\text{potenza della sorgente campione}}\\ =&10 \log_{10} \frac{P}{P_{\text{rif}}}.\end{aligned}$$

quindi il livello in dB dipende dal *logaritmo* in base 10.

Una sorgente a $+20$ dB ha una potenza $P = 100P_{\text{rif}}$, un livello di -3 dB significa che la potenza è ora $P = \frac{1}{2}P_{\text{rif}}$.

• Definiamo il logaritmo in *base* 10 di un numero a come l'esponente a cui si deve elevare 10 per ottenere a:

$$a = 10^{\,\log_{10} a}.$$

Questa definizione si applica a basi diverse da 10 (si conviene che la base dei logaritmi sia maggiore di 1) come 2 ed $e = 2.718\ldots$ Indichiamo con ln il logaritmo naturale in base e, con ld il logaritmo in base 2 usato nella teoria dell'informazione.

Le regole per operare con i logaritmi derivano da quelle per le potenze; posto

• $x = a^p$, $y = a^q$, cioè $p = \log_a x$, $q = \log_a y$,

si ha:

• $xy = a^p a^q = a^{p+q}$, allora $p + q = \log xy = \log x + \log y$;

• $\frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, allora $p - q = \log \frac{x}{y} = \log x - \log y$;

- $x^n = (a^p)^n = a^{np}$, allora $np = \log x^n = n \log x$.
- Non si definisce $\log 0$, (perché ?), mentre $\log 1 = 0$ ($a^0 = 1$).
- Inoltre, da $x = a^{\log_a x}$ si ricava $\log_b x = \log_a x \log_b a$, allora $\ln x = \ln 10 \log_{10} x$. Poichè $\ln 10 \approx 2.3$ è $\ln x \approx 2.3 \log_{10} x$.

5. Ecco i valori di alcuni logaritmi decimali:
$\log 2 \approx 0.301$, $\log 3 \approx 0.477$, $\log 5 \approx 0.699$, $\log 7 \approx 0.845$

6. $\log \frac{1}{10} = \log 1 - \log 10 = -1$.

7. $\log 0.5 = \log \frac{1}{2} = -\log 2 = -0.301 = \log \frac{5}{10} = \log 5 - \log 10$;

8. $\log \frac{1}{9} = -\log 9 = -2 \log 3 = -0.954$.

La funzione inversa della funzione esponenziale è la funzione logaritmo naturale $\ln x$ con dominio $\mathbf{R}^+$ e codominio $\mathbf{R}$. I grafici di queste funzioni sono in figura.

9. Un metodo di datazione per reperti archeologici si basa sul fatto che, finché un organismo vive, scambia continuamente, attraverso la respirazione, carbonio sotto forma di CO_2. Ora l'atomo di carbonio C si presenta in due isotopi ^{12}C, stabile e ^{14}C, instabile. La vita media di quest'ultimo, cioé il tempo medio perché una metà degli atomi di ^{14}C decada in qualcos'altro, è di 5 730 anni.

Allora è possibile datare un campione contando quanti atomi di carbonio decadono nel tempo di 1 minuto. Per un grammo di carbonio estratto oggi da un essere vivente si hanno 15 decadimenti al minuto. Se in un altro campione si contassero 15 decadimenti ogni 2 minuti ($\frac{15}{2}$ al minuto), l'eta del reperto sarebbe pari al tempo di dimezzamento, cioé circa 5 730 anni.

Il numero n di disintegrazioni al minuto è

$$n = 15 \cdot 2^{-t/5730} \quad \text{(decadimenti/minuto grammo)}.$$

Per esempio, se si contano 200 disintegrazioni al minuto da un campione di 50 grammi di carbonio allora vi sono $200/50 = 4$ disintegrazioni al minuto, circa $1/4$ (esattamente $4/15 \approx 0.27$) di quante ve ne sono in un campione di oggi. Possiamo stimare perciò l'età del campione in circa $2 \times 5\,730 \approx 11\,400$ anni. Per stimare meglio questa età si risolve l'equazione $2^{-t/5730} = 0.27$ usando i logaritmi:

$$\begin{aligned} -\frac{t}{5\,730} \log 2 &= \log 0.27 \\ t &= -\,5\,730 \, \frac{\log 0.27}{\log 2} \\ t &= 5\,730 \cdot 1.89 \approx 10\,800. \end{aligned}$$

• **Oss.** Molti fenomeni fisici mostrano un'andamento di tipo esponenziale nel tempo come $e^{-t/\tau}$ (oscillazioni smorzate, o più semplicemente il raffreddamento del caffè in una tazza!) o come $2^{-t/\tau}$ (decadimento radioattivo). La costante di tempo τ è caratteristica del fenomeno: per i radionuclidi può variare dai μs ai milioni di anni.

10. La temperatura del caffé espresso in tazzina appena fatto è 85℃, mentre dopo 1' è diminuita a 70℃. La temperatura del bar è 15℃. Dopo altri due minuti è diventato freddo?

Qui la temperatura (del caffé) è un altro esempio di una quantità che diminuisce con una velocità che è proporzionale al valore che ha in quell'istante. La ragione di questo comportamento sta nel fatto sperimentale che il calore ceduto all'ambiente circostante è tanto più grande quanto maggiore è la differenza di temperatura tra il caffè e l'ambiente. Al contrario il calore ceduto sarà tanto minore quanto più piccola è la differenza di temperatura con l'ambiente intorno. Il caffé si raffredda sempre più lentamente quando la temperatura è vicina a quella dell'ambiente. Quindi anche dopo un'ora la temperatura del caffè non sarà inferiore a quella del bar. La temperatura T dipende dal tempo t come:

$$\mathrm{T}(t) = a\,e^{-bt} + c,$$

dove a, b, c sono le costanti caratteristiche del fenomeno (legge del raffreddamento di Newton). Qui $c = 15℃$, la temperatura dell'ambiente. Quest'ultima va sottratta dalla temperatura del caffè per trovare le costanti a, b. Si prende il minuto come unità per il tempo. Dalle condizioni iniziali ($t = 0$, $\mathrm{T} = 85℃$) si ha

$$\mathrm{T}(0) = a\,e^{-b\cdot 0} + 15; \quad \text{e segue} \quad a = 85 - 15 = 70.$$

Il reciproco della costante di tempo b si ricava da

$$\mathrm{T}(1) = 70 = a\,e^{-b\cdot 1} + 15, \quad \text{ovvero } 70\,e^{-b} = 70 - 15 = 55.$$

Si tratta di risolvere l'equazione esponenziale

$$\frac{70}{55} = e^{b} \quad \rightarrow \quad b = \ln\frac{70}{55} \approx 0.24\,.$$

• Per risolvere le equazioni esponenziali si usano i logaritmi. Di converso, per risolvere equazioni logaritmiche si usano gli esponenziali.

La temperatura in funzione del tempo è espressa da:

$$T(t) = 70\, e^{-0.24t} + 15.$$

• In particolare $T(3) = 70\, e^{-0.24\cdot 3} + 15 \approx 34 + 15 = 49$℃. Ancora bevibile!

• **Oss.** Qui la costante di tempo è $\tau = 1/b \approx 4.1$ minuti.

11. Gli altimetri da polso usati dagli escursionisti in montagna sono in realtà dei misuratori di pressione atmosferica (*barometri*). Tra la quota sul livello del mare e la pressione esiste la relazione $p = p_0 2^{-h/h_0}$ dove p_0 è la pressione al livello del mare e $h_0 \approx 5.5$ km. Quindi la pressione atmosferica vale p_0 al livello del mare, $\frac{1}{2}p_0$ a circa 5.5 km di quota, $\frac{1}{4}p_0$ a circa 11 km di quota, $\frac{1}{8}p_0$ a circa 16.5 km, ecc.: un tipico comportamento esponenziale.

• Si ottiene la quota invertendo la relazione: $h = h_0 \log_2 p_0/p$.

• **Oss.** Poiché la pressione si dimezza ogni 5 500 metri di quota, si considera solo la parte iniziale del grafico di $\log_2(P_0/P)$, diciamo quella per $1 \leq P_0/P \leq 2$. Questo tratto è all'incirca lineare e così quindi sarà anche la scala dell'altimetro.

12. La scala Richter (da Ch. F. Richter 1900 - 1985) misura l'ener - gia liberata da un terremoto. Ad ogni grado (*magnitudo*) in più della scala corrisponde una quantità di energia liberata 10 volte maggiore. Si tratta quindi di una scala logaritmica.

Crescita delle funzioni

Le funzioni potenza x^n, le funzioni esponenziali a^x $(a > 1)$ e le funzioni inverse di queste, le funzioni radice $\sqrt[n]{x}$ $(x^{1/n})$ e logaritmo $\log_a x$ (in base $a > 1$) hanno in comune che per $x \to +\infty$ divergono tutte a $+\infty$. Interessa allora confrontare la rapidità di crescita di queste diverse funzioni. A questo scopo considereremo valori interi di x in modo da facilitare i calcoli.

Si sa già che per le funzioni potenza quando $x > 1$ vale l'ordinamento: $x < x^2 < x^3 < \cdots < x^n < \cdots$. Confrontiamo ora la funzione x^2 con l'esponenziale 2^x; la tabella mostra che

x	1	2	3	4	5	6	...	10	...
x^2	1	4	9	16	25	36	...	100	...
2^x	2	4	8	16	32	64	...	1 024	...

Per $x \geq 5$ è anche $2^x > x^2$ e provando per x^3, $x^4, \ldots$ si ricava $2^x > x^3$ per $x \geq 10$ $(2^{10} = 1\,024 > 1\,000 = 10^3)$ e $2^x > x^4$ per $x > 16$ $(2^{16} = 16^4)$. A questo punto ci si chiede se per caso non è, a partire da un certo x_0 in poi, anche $2^x > x^{100}$. Sperimentando alcuni valori si ha:

x	$100 = 10^2$	$\dots$	$1\,000 = 10^3$
x^{100}	$(10^2)^{100} = 10^{200}$	$\dots$	$(10^3)^{100} = 10^{300}$
2^x	$2^{100} > 10^{30}$	$\dots$	$(2^{10})^{100} > (10^3)^{100}$

dove si utilizzato il fatto che $2^{10} = 1024 > 10^3$. Allora per $x \geq 1000$ è $2^x > x^{100}$; si può formulare l'ipotesi che per ogni n esiste un x_0 tale che per $x > x_0$ sia comunque $2^x > x^n$. Pur senza dare una dimostrazione rigorosa di questo fatto sviluppiamo alcune considerazioni che confermano questa ipotesi.

Per 2^x il rapporto tra termini successivi vale:

$$\frac{2^{x+1}}{2^x} = 2$$

dove il rapporto è indipendente da x e cioè costante. Una simile successione di valori si dice *geometrica* ed è appunto caratterizzata dal fatto che il rapporto tra termini successivi è costante:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \text{ovvero} \quad a_{n+1} = qa_n$$

Se è $q > 1$ la successione geometrica diverge. Al contrario il rapporto:

$$\frac{(x+1)^n}{x^n} = \frac{x^n + nx^{n-1} + \dots}{x^n} = 1 + n\frac{1}{x} + \frac{\dots}{x^n} \;\; \to 1 \text{ se } x \to +\infty$$

dove con $\frac{\dots}{x^n}$ si indicano i termini in x^{n-2}, x^{n-3} ecc., tutti termini che $\to 0$. Quindi il rapporto tra due termini consecutivi si avvicina ad 1 e questo tipo di funzione, almeno da un certo x in poi cresce meno rapidamente di 2^x.

Un altro modo di rendersi intuitivamente conto della proprietà delle funzioni esponenziali di superare *comunque* le funzioni del tipo x^n è quello di costruire una tabella delle differenze:

x	1	2	3	4	5	6	7	$\dots$		
x^2	1	4	9	16	25	36	49	$\dots$		
Δ_1		3		5		7		9	11	13 $\dots$
Δ_2		2	2	2	2	2	$\dots$			

le differenze diventano costanti dopo due passaggi. Analogamente per x^3; dopo tre passaggi è

x	1	2	3	4	5	6	...
x^3	1	8	27	64	125	216	...
Δ_1	7	19	37	61	91	...	
Δ_2	12	18	24	30	...		
Δ_3	6	6	6	...			

Al contrario per 2^x si ha:

x	1	2	3	4	5	6	7	...
2^x	2	4	8	16	32	64	128	...
Δ_1	2	4	8	16	32	64	...	
Δ_2	2	4	8	16	32	...		
Δ_3	2	4	8	16	...			

Le differenze sono sempre dello stesso tipo e non vi è uno stadio in cui divengono costanti: ad ogni passaggio viene riprodotta la successione di partenza. Allora questa successione cresce più rapidamente anche di x^{1000} perchè la tavola delle differenze per x^{1000} diverrà costante dopo 1 000 passaggi, mentre per la successione geometrica la tavola delle differenze resterà sempre identica alla successione stessa!

Una successione che mostra un comportamento analogo è la successione di Fibonacci, che viene definita ricorsivamente come:

$$F_1 = 1 \quad F_2 = 1 \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

I primi termini della successione sono: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

Vi sono allora successioni che crescono più rapidamente di qualsiasi funzione potenza. Ora, quale successione cresce più rapidamente di 2^x? Ad esempio 3^x, poi 4^x cresce più velocemente di 3^x, x^x più velocemente di n^x. C'è chi ha dimostrato che data una qualsiasi famiglia di successioni crescenti, si può *sempre* costruirne un'altra che cresce più rapidamente.

Per le funzioni - radice e logaritmo, che sono le funzioni inverse di quelle appena viste potenza ed esponenziale, valgono inversi risultati: la funzione logaritmo cresce a $+\infty$ più lentamente di qualsiasi funzione radice. Quindi ci si deve aspettare che, ad esempio,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = +\infty \quad \text{ovvero} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0.$$

Esercizi

1. Tracciare i grafici approssimati delle funzioni.

- $\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$, $\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$.
- $e^{|x|}$, $e^{1-|x|}$.
- e^{-x^2}, e^{1-x^2}, $e^{-(x-a)^2}$, $e^{-\frac{1}{x^2}}$.
- $e^{\sqrt{x}}$, $e^{-\frac{1}{x}}$, $e^{\sin x}$.
- $x + e^x$, $x - e^x$, xe^x, x^2e^x, $\frac{e^x}{x}$.
- $\ln(1+x)$, $\ln x^2$, $\ln(1+x^2)$.
- $\ln|x|$, $|\ln x|$, $\ln(1+|x|)$, $|\ln|x||$.

2. Costruire una tavola delle differenze per la successione di Fibonacci.

3. Costruire una tavola delle differenze per x^4, x^5 quanto vale la differenza costante? Si riesce a stabilire quale sarà il valore della differenza costante per x^n?

Il problema della velocità

Per misurare sperimentalmente la *velocità media* si misura il tempo Δt impiegato a percorrere un tratto di lunghezza fissata ΔS. Si definisce quindi:

$$\text{velocità media} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Se la relazione (funzione) che lega spazio e tempo, cioè la funzione $S(t)$, è nota allora si può calcolare la velocità media su qualsiasi intervallo ricordando che:

$\Delta S = S_2 - S_1 = S(t_2) - S(t_1)$ e $\Delta t = t_2 - t_1$; si trova allora:

$$\text{velocità media} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Esempi

1. Sia $S = vt$ (v costante, moto uniforme). Allora risulta:

$$\text{velocità media} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{vt_2 - vt_1}{t_2 - t_1} = v\,.$$

La velocità media v è indipendente dal particolare intervallo Δt in cui viene misurata. Questo implica che sia la stessa in ogni istante. La velocità istantanea è quindi pari alla velocità media.

2. Lo spazio percorso da un corpo in caduta libera vale (approssimativamente) $S = 5t^2$ (moto naturalmente accelerato). Per stimare la velocità a $t = 3$ s troviamo le velocità medie negli intervalli contigui $(2;3)$ e $(3;4)$ s. La prima vale

$$v_{3;4} = \frac{S(4) - S(3)}{4 - 3} = 5 \cdot 16 - 5 \cdot 9 = 35\,\mathrm{m/s}.$$

Per la velocità media nell'intervallo $t_0 = 2$ s, $t_1 = 3$ s si ha invece:

$$v_{2;3} = \frac{S(3) - S(2)}{3 - 2} = 5 \cdot 9 - 5 \cdot 4 = 25\,\mathrm{m/s}$$

La velocità media nei due intervalli non è la stessa. Il procedimento usato non dà un unico valore per la velocità, ma solo una *stima*: la velocità a $t = 3$ s è compresa tra 25 e 35 m/s.

Si può ridurre l'incertezza su questo valore prendendo degli intervalli minori:

$$v_{2.9;3.0} = \frac{S(3) - S(2.9)}{3 - 2.9} = 5 \cdot 10 \cdot (3^2 - (3 - 0.1)^2) = 29.5\,\mathrm{m/s}$$

$$v_{3.0;3.1} = \frac{S(3.1) - S(3)}{3.1 - 3} = 5 \cdot 10 \cdot ((3 + 0.1)^2 - 3^2) = 30.5\,\mathrm{m/s}$$

La velocità è compresa tra 29.5 e 30.5 m/s. Restringendo l'intervallo a 0.01 s si ha:

$$v_{2.99;3.00} = 100 \cdot 5 \cdot (3^2 - (3 - 0.01)^2) = 29.95\,\mathrm{m/s}$$

$$v_{3.00;3.01} = 100 \cdot 5 \cdot ((3 + 0.01)^2 - 3^2) = 30.05\,\mathrm{m/s}$$

Ora è $29.95 < v_3 < 30.05$ m/s. Costruiamo la tabella:

Δt	1.0	0.1	0.01	...	s
$v_{\max}$	35	30.5	30.05	...	m/s
$v_{\min}$	25	29.5	29.95	...	m/s
Δv	10	1	0.1	...	m/s

Si intuisce che si potrà ancora diminuire l'incertezza sul valore della velocità a $t = 3$ se, ad esempio, si calcolano $v_{\max}$ e $v_{\min}$ su un intervallo di 0.001 s, restando sempre $v_{\max}$ un po' più grande di $30\,\mathrm{m/s}$ e $v_{\min}$ un po' più piccola. L'unico valore che in questo procedimento di successive approssimazioni alla velocità a $t = 3$ s rimane comune a tutti questi intervalli incapsulati è proprio $v = 30\,\mathrm{m/s}$. Verifichiamo questa affermazione calcolando la velocità per un incremento Δt *qualunque* (positivo o negativo: si è già posto $\Delta t = \pm 1, \pm 0.1, \ldots$). È:

$$\Delta S = S(3+\Delta t) - S(3) = 5 \cdot ((3+\Delta t)^2 - 3^2) = 5 \cdot (6\Delta t + \Delta t^2)$$

Poichè $\Delta t \neq 0$ si può dividere e per la velocità media nell'intervallo $(3, 3+\Delta t)$ si ha:

$$v_{3;3+\Delta t} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = 5 \cdot \frac{6\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 30 + 5\Delta t$$

dove è immediato riconoscere che $v \to 30$ per $\Delta t \to 0$ nel senso che prendendo opportunamente (piccolo) Δt si può rendere v vicina a $30\,\mathrm{m/s}$ quanto si vuole. Questa condizione definisce la *velocità istantanea* a $t = 3$ s come il valore - limite per $\Delta t \to 0$ della velocità media:

$$v(3) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(3+\Delta t) - S(3)}{\Delta t} = 30 \text{ m/s}$$

dove scrivendo $v(3)$ si intende la velocità istantanea a $t = 3\,\mathrm{s}$.

In generale per un istante t qualsiasi sarà:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

dove con la scrittura $v(t)$ si intende evidenziare il fatto che la velocità istantanea dipende dall'istante per cui viene calcolata.

Il problema della velocità di caduta esemplifica una categoria di problemi, dove si parla di *tasso (locale) di variazione, di interesse, di accelerazione, di inflazione, di tasso di crescita, trend delle vendite, ...*: si tratta di trovare *in generale* quanto rapidamente una grandezza varia rispetto ad un'altra da cui dipende.

Data la funzione $f(x)$ (un modello matematico della relazione tra le grandezze del caso) si determina con quale rapidità $f(x)$ varia rispetto a x. Ciò significa saper calcolare il valore-limite del rapporto

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

dove il numeratore Δf e il denominatore Δx tendono entrambi a zero. Per prima si esamina quindi la tecnica di calcolo dei limiti.

I problemi che riguardano l'analisi dell'andamento *locale* delle funzioni trovano soluzione *in generale* col *calcolo differenziale*. Questa tecnica permette di risolvere molti altri importanti problemi circa le proprietà e l'andamento delle funzioni.

Limiti e continuità

Esempio

La funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ è definita in $\mathbf{R} - \{1\}$, cioè dovunque sull'asse reale escluso il punto $x = 1$, dove diviene $\frac{0}{0}$, una scrittura priva di significato. Se $x \neq 1$ si può dividere, allora $f(x) = x + 1$ per $x \neq 1$.

Per farci un'idea dell'andamento della funzione calcoliamo e riportiamo in una tabella e in un grafico i valori di $f(x)$ in alcuni punti vicini a $x = 1$ da destra e sinistra. Nei punti vicini a $x = 1$ il valore di $f(x)$ è vicino a 2. Verifichiamo questo fatto per un incremento $\Delta x \neq 0$ *qualsiasi*

$$f(1 + \Delta x) = \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{(1 + \Delta x) - 1} = \frac{2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2 + \Delta x.$$

Se $\Delta x \to 0$ ('Δx tende a 0') allora $2 + \Delta x \to 2$ ('$2 + \Delta x$ tende a 2'). Allora il numero $f(x)$ può esser reso vicino a 2 quanto si vuole scegliendo opportunamente x vicino a 1.

La figura mostra il criterio per stabilire l'effettiva esistenza di questa corrispondenza tra punti 'vicini' in questo esempio. Supponiamo di fissare una banda di indeterminazione ampia $2\epsilon > 0$ centrata intorno al limite 2. Vogliamo trovare un intervallo che contenga quegli x per cui il corrispondente valore $f(x)$ cade entro la banda di oscillazione fissata; si vuole cioè *stimare* il limite a meno di ϵ. Questa condizione è verificata per gli $x \neq 1$ ($x = 1$ è escluso!) interni all'intervallo $(1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$.

Se questa corrispondenza tra intervalli, il primo intorno al valore - limite 2 e l'altro intorno a $x = 1$, è verificata *comunque* si fissi $\epsilon > 0$ si dice che

- '$f(x)$ tende a 2 per x che tende a 1 ', oppure che
- '2 è il limite di $f(x)$ per $x \to 1$', usando la notazione:
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$, che leggiamo: 'il limite per x che tende a 1 di $f(x)$ vale 2'.

Quando il ragionamento appena fatto per i numeri 1 e 2 si può applicare a due qualsiasi numeri reali p e ℓ, si generalizza la definizione scrivendo $\lim\limits_{x \to p} f(x) = \ell$.

È necessario sottolineare con la massima forza alcuni fatti:

• il *valore* di $f(x)$ nel punto $x = 1$ non è mai entrato in tutto questo ragionamento, tant'è che in questo caso si aveva:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} = x+1 & \text{per } x \neq 1 \\ \text{non-definita} & \text{per } x = 1 \end{cases}$$

Possiamo anzi applicare il ragionamento alla funzione data come:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} = x+1 & \text{per } x \neq 1 \\ 0 & \text{per } x = 1 \end{cases}$$

ottenendo per il limite ancora il valore 2.

• Il valore e l'esistenza del limite dipendono *soltanto* dal comportamento della funzione nei punti prossimi a p. Si procede in senso inverso: si fissa la banda di oscillazione intorno al valore - limite e si verifica che ad essa (per tramite della funzione inversa) corrisponda un intervallo che contiene p. In particolare è necessario che la corrispondenza $y \mapsto x$ tra intervalli sia verificata *comunque* si scelga la banda di oscillazione intorno al valore - limite. Si deve riuscire a dimostrare che p è *sempre* un punto *interno* all'insieme - soluzione della disequazione $|f(x) - l| < \epsilon$. Allora in ogni intorno di p cade almeno un punto (cioè infiniti punti!) dell'insieme-soluzione.

Esempio

Sia data la funzione: $\dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} -1 & \text{per } x < 0 \\ +1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$

Il grafico mostra come in prossimità di $x = 0$ la funzione abbia un particolare comportamento. Cerchiamo il limite, se esiste, per $x \to 0$. Dalla definizione segue che:

- $f(x) = +1$ per *qualsiasi* x purché $x > 0$,
- $f(x) = -1$ per *qualsiasi* x purché negativo.

Confrontando questi comportamenti appare che per valori prossimi a $x = 0$

- da sinistra ($x \to 0^-$) il limite è -1, mentre
- da destra ($x \to 0^+$) il limite vale $+1$.

• La conclusione è che non vi è un *unico* valore da assegnare per il limite e quindi il limite stesso *non esiste*. Allora se il limite esiste è *unico*. L'*unicità* è una proprietà fondamentale del limite.

Esistono però *indipendentemente* il limite destro (da valori positivi) e il limite sinistro (da valori negativi) che abbiamo appena visto valere rispettivamente $+1$ e -1. Segnamo questi limiti *unilaterali* con le scritture $\lim_{x\to 0^+} f = +1$, $\lim_{x\to 0^-} f = -1$. Allora una formulazione alternativa dell'unicità del limite consiste nel dire che il limite esiste quando i limiti destro e sinistro esistono e sono uguali.

• **Oss.** A partire da $\frac{x}{|x|}$ si definisce la funzione 'segno di x' come:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ +1 & \text{per } x > 0 \end{cases} \quad \text{o anche} \quad \begin{cases} x/|x| & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}.$$

Questa funzione è definita *anche* in $x = 0$.

Esempio

La funzione $f(x) = x^2 + 1$ ha limite $\ell = 5$ per $x \to 2$.

Applichiamo la definizione trovando l'intorno di $x = 2$ per ogni $x \neq 2$ del quale sia verificata la disequazione:

$$\left|(x^2 + 1) - 5\right| < \epsilon, \quad \text{ovvero} \quad 4 - \epsilon < x^2 < 4 + \epsilon.$$

Quest'ultima disequazione è verificata dai punti interni all'inter - vallo $(\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon})$. In particolare in questo caso la disequazione è verificata *anche* nel punto $x = 2$.

• Ad esempio, sia $\epsilon = 0.2$. Allora $\sqrt{3.8} < x < \sqrt{4.2}$. Infatti per $x = 1.95 = 2.0 - 0.05$ si ha:

$$[(2.0 - 0.05)^2 + 1] - 5 = -0.2 + (0.05)^2 > -\epsilon = -0.2$$

Possiamo verificare questa disuguaglianza per qualsiasi (comunque lo si scelga) ϵ, allora il limite esiste e vale appunto 5. Vale anche $f(2) = 5$.

Diciamo *continua nel punto* $x = 2$ la funzione per cui:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

e se questa proprietà è verificata per *ogni* x nel dominio della funzione, si dice che '$f(x)$ è una funzione continua'.

• È evidente l'importanza di classificare le funzioni come continue: il calcolo del limite per questo tipo di funzioni si riduce al calcolo del valore della funzione, cioè $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Altri limiti

Oltre al caso del limite ℓ per $x \to p$ con p, ℓ entrambi finiti, vi sono altre situazioni per cui si definisce un valore - limite per le funzioni.

Esempi

1. Esaminiamo con l'aiuto della tabella il comportamento della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ in prossimità del punto $x = 0$, dove non è definita. È:

x	$\dots$	-0.5	-0.1	-0.01	$\dots$	0.001	0.05	0.2	$\dots$
$\frac{1}{x}$	$\dots$	-2	-10	-100	$\dots$	1000	20	5	$\dots$

È evidente che basta prendere un x vicino a 0 perché $f(x)$ superi ogni limitazione: si dice allora che per $x \to 0$ la funzione $f(x)$ è *illimitata, diverge, tende a ..., ha come limite infinito.*

Formalmente si scrive $\lim\limits_{x \to p} f(x) = \infty$ quando, comunque si fissi un numero $M > 0$, si può trovare un intorno di 0 tale che per ogni $x \neq 0$ interno sia $|f(x)| > M$ ($f(x) > M$ oppure $f(x) < -M$).

- *Verifica* Qui $p = 0$. Fissato, per esempio, $M = 1 \times 10^6$, sarà $f(x) > M$ quando $0 < x < 1 \times 10^{-6}$ (oppure $f(x) < -M$ se $-1 \times 10^{-6} < x < 0$). Si dice in questo caso che $f \to +\infty$ per $x \to 0^+$ e rispettivamente $f \to -\infty$ per $x \to 0^-$. Si scrive allora:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \text{in breve} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

2. In generale per $k = 1, 2, \dots$ vale $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^k} = \infty$. Quando $k = 2, 4, \dots$, pari, $\ell = +\infty$, mentre per $k = 3, 5, \dots$, dispari, il comportamento è lo stesso di $\frac{1}{x}$ ($k = 1$!).

3. La funzione $y = \dfrac{1 + 3x}{x^2 - 1}$ diverge nei punti $x = \pm 1$. Le funzioni razionali $f : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ non sono definite per quegli $x \in \mathbf{R}$ che annullano il polinomio $q(x)$ al denominatore. In questi punti di solito (se lì non si annulla anche $p(x)$!) la funzione diverge.

Attenzione: Il segno ∞ **non** rappresenta un un numero. Le regole per operare con ∞ sono alquanto diverse da quelle per i numeri. Vale infatti, per ogni a in $\mathbf{R}$

- $a + (\pm\infty) = \pm\infty$;
- $+\infty + \infty = +\infty$ e $-\infty + (-\infty) = -\infty$;

- $+\infty - \infty$ resta **indeterminato**.
- $a \cdot \pm\infty = \pm\infty$ se $a > 0$, $a \cdot \pm\infty = \mp\infty$ se $a < 0$;
- $+\infty \cdot (+\infty) = -\infty \cdot (-\infty) = +\infty$, $-\infty \cdot (+\infty) = -\infty$;
- $0 \cdot \infty$ resta **indeterminato**.

NB: Per quanto visto, **soltanto** nel passaggio al limite ha senso scrivere $\frac{1}{0} = \infty$ e $\frac{1}{\infty} = 0$.

4. La funzione $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ è limitata: è $0 < f(x) \leq 1$, $\forall x$. Per questa funzione *pari* la distanza del grafico dall'asse X diminuisce tanto più i valori x si scostano dall'origine sulle semirette $x > 0$ e $x < 0$. Queste semirette vanno viste come intorni di $\pm\infty$. Allora concludiamo che $f(x) \to 0$ quando $|x|$ cresce oltre ogni limite, fatto che si esprime con $x \to \pm\infty$, in breve per $x \to \infty$.

- Questo esempio si formalizza: per analogia, si dice che $f(x)$ ha limite (finito) ℓ per $x \to +\infty$ (oppure per $x \to -\infty$) se, fissato $\epsilon > 0$, è sempre possibile trovare un numero positivo x_0 (ovvero negativo) tale che per $x > x_0$ ($x < x_0$) sia $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

- *Verifica* In questo caso $\ell = 0$. Allora $\frac{1}{1+x^2} < \epsilon \iff x^2 > \frac{1-\epsilon}{\epsilon}$. Costruiamo una tabella per alcuni ϵ e i corrispondenti x_0.

ϵ	...	0.1	0.01	0.001	...
x_0		3	$\sqrt{99}$	$\sqrt{999}$	...

Ad esempio, per $x = 10 > \sqrt{99}$ si ha $f(x) = \frac{1}{101} < 0.01$.
Si scrive allora per questa funzione:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0, \ \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0, \text{ in breve } \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

5. Controesempio. $f(x) = \sin x$ è limitata, ma *non* ammette limite per $x \to \pm\infty$ essendo impossibile assegnare un valore unico per il limite. Infatti nei punti $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k = \pm 1, 2, \ldots$ (un intorno di ∞) la funzione vale 1, mentre per $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ vale -1.

Si dà anche il caso assai comune di funzioni che al crescere di x sulla semiretta $x > 0$ (analogamente per $x \to -\infty$) divengono superiormente o inferiormente illimitate.

6. $y = x$ tende a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$;

7. $y = x^2$ tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$

8. $y = x^3$ tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e a $-\infty$ per $x \to -\infty$.

In generale quando $x \to \infty$ le funzioni $y = x^n$ hanno come limite:

- $+\infty$ per $x \to \pm\infty$ se n è *pari*,
- $+\infty$ per $x \to +\infty$; $-\infty$ per $x \to -\infty$ se n è *dispari*.

9. Per $x \to +\infty$ la funzione esponenziale $y = a^x$ ha limite $+\infty$ quando $a > 1$; ha limite 0 quando $a < 1$ ($a > 0$!), ha limite 1 quando $a = 1$.

Esercizi

- Esaminare con l'aiuto di una tabella il comportamento delle funzioni e trovare i corrispondenti limiti.

a) $f = \dfrac{1}{x^2}$ in prossimità del punto $x = 0$;

b) $f = \dfrac{x}{2-x}$ in prossimità del punto $x = 2$;

c) $f = \dfrac{x}{1+x}$ per $x \to +\infty$;

d) $f = \dfrac{x}{1+x^2}$ per $x \to \pm\infty$.

e) $f = x^2 - x - 100$ per $x \to +\infty$

- Stabilire un intorno di

a') $p = 0$ tale che $f = \dfrac{1}{x^2} > 10^6$;

b') $p = 1$ tale che $\left|\dfrac{x}{2-x} - 1\right| < 10^{-3}$;

c') $p = +\infty$ tale che $\left|\dfrac{x}{1+x} - 1\right| < 0.01$;

d') $p = \infty$ tale che $\left|\dfrac{x}{1+x^2} - 1\right| < 0.01$.

e') $p = \infty$ tale che $|(x^2 - x - 100)| > 1000$.

- Quanto vale il limite? Fate le vostre congetture.

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{x}$.

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}$,

Aritmetica dei limiti

Siano $\lim_{x\to p} f_1 = \ell_1$ e $\lim_{x\to p} f_2 = \ell_2$ e α, β due numeri reali. Allora è anche:

- $\lim_{x\to p} \alpha f_1 + \beta f_2 = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$
- $\lim_{x\to p} \alpha f_1 \cdot \beta f_2 = \alpha\beta\ell_1\ell_2$
- Se $\beta \neq 0$ allora $\lim_{x\to p} \dfrac{\alpha f_1}{\beta f_2} = \dfrac{\alpha\ell_1}{\beta\ell_2}$, purché $\ell_2 \neq 0$.

NB: La funzione f_2 ha lo stesso segno del limite ℓ_2 *almeno* in un intorno di p: questo è il teorema della *permanenza del segno*.

Esempi

1. $\lim_{x\to 1} 2x^2 - 3x + 1 = 2\lim_{x\to 1} x^2 - 3\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 1 = 2 - 3 + 1 = 0$

2. $\lim_{x\to -2} 3x^2 \cdot \dfrac{2x-5}{4} = -27$

3. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-1}{3x+1} = 1$

4. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$. Qui un caso un po' speciale: il limite per $x \to \infty$ di $\sin x$ non esiste perché indeterminato. Tuttavia il margine di oscillazione di $\sin x$ viene ristretto da $\frac{1}{x}$ perché $\frac{1}{x} \to 0$ per $x \to \infty$ e quindi si assegna al limite del prodotto il valore 0.

In generale se $f(x)$ è limitata ($|f(x)| \leq M > 0$) e $g(x) \to 0$ per $x \to p$, allora

$$\lim_{x\to p} f \cdot g \leq M \lim_{x\to p} g(x) = 0.$$

Infinitesimi e infiniti

Interessano dal punto di vista delle applicazioni le funzioni che per qualche valore x tendono a zero. Queste funzioni si chiamano *infinitesimi*. Importante è il limite del rapporto di due funzioni f, g entrambe infinitesime per uno stesso x. Questo caso in generale dà luogo ad una indeterminazione del tipo $\frac{0}{0}$. Spesso si può decidere il valore del limite con tecniche algebriche e/o con l'uso di regole (teoremi). Analogamente per funzioni f, g che $\to (\pm)\infty$ per $x \to (\pm)\infty$ (e che perciò si chiamano *infiniti*) interessa spesso stabilire la relativa rapidità di crescita. Qui si può verificare una indeterminazione del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. La somma di infiniti termini infinitesimi conduce ad un terzo tipo di indeterminazione si ha nella forma $0 \cdot \infty$ che viene ricondotta algebricamente a una delle precedenti. Vediamo separatamente i due tipi di problemi.

Infinitesimi

Il confronto di infinitesimi (funzioni infinitesime f, g) procede attraverso il calcolo del limite $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f}{g}$. Per semplicità consideriamo il rapporto

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x\to 0} x^{n-m} = \begin{cases} 0 & \text{per } n > m \\ 1 & \text{per } n = m \\ \infty & \text{per } n < m \end{cases}$$

Infatti, posto $k = n - m$, le funzioni $\frac{f}{g}$ si riscrivono come x^k, $x^0 = 1$, $x^{-k} = \dfrac{1}{x^k}$ $(k > 0)$, di cui si sono già visti i limiti per $x \to 0$. Nel caso che il limite sia finito e diverso da zero si dice che gli infinitesimi sono dello stesso ordine, se poi il limite vale 1 allora essi si dicono equivalenti e uno può sostituire l'altro nel calcolo dei limiti.

Esempi

1. Se la funzione $g(x) = f(x) - f(x_0)$ è infinitesima per $x \to x_0$ allora $f(x)$ è una funzione continua in x_0. Infatti:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0) = 0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ma questa non è altro che la condizione per dire f continua in x_0.

2. La funzione $f = x$ tende a zero più rapidamente di $g = \sqrt{x}$; infatti il rapporto $\dfrac{f}{g} = \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ tende a 0 per $x \to 0$.

3. La funzione $\dfrac{\sin x}{x}$ non è definita in $x = 0$ $(\frac{0}{0})$; dalla tabella:

x rad	...	0.5	0.1	0.01	...
$\sin x$	...	0.48	0.0998	0.00999	...
$\frac{\sin x}{x}$	...	0.96	0.998	0.9999	...

e dall'esame del grafico delle due funzioni si intuisce come per $x \to 0$ il limite vale 1.

La dimostrazione fa uso del fatto che per $x > 0$ si può scrivere $\sin x < x < \tan x$. Dividendo ciascun termine per $\sin x > 0$ si ottiene:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{ovvero} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{per i reciproci,}$$

ma $\cos x \to 1$ per $x \to 0$, allora:

$$\lim_{x\to 0} \cos x < \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} < 1$$
$$1 < \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} < 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

dove si è fatto uso del *confronto* tra limiti: se in un intorno di p tra le funzioni f, g, h vale la relazione $f \leq g \leq h$ e f, h hanno lo *stesso* limite ℓ per $x \to p$, allora anche g ha per limite ℓ per $x \to p$.

• Analoga dimostrazione si può sviluppare per $x \to 0^-$, con uguale conclusione. Allora il limite è proprio 1. Conseguenze importanti di questo fatto:

• x e $\sin x$ sono infinitesimi dello stesso ordine, anzi equivalenti: ad esempio nel calcolo del limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - x}{x^2 - x}$ si procede scrivendo: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - x} = 1$.

• In prossimità di $x = 0$ vale l'approssimazione $\sin x \approx x$.

• Si può ora definire la funzione:

$$f^\star = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{per } x \neq 0, \\ 1 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

Si dice allora che f è stata *prolungata* in $x = 0$, assegnando lì alla funzione il valore del limite ed eliminando così la lacuna di definizione.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. Si procede inizialmente moltiplicando per $\dfrac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = 1$; si sfrutta poi $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ e il limite notevole dell'esempio 3.

Quindi $1 - \cos x$ è infinitesimo dello stesso ordine di x^2, ma non equivalente ($\frac{1}{2}$!).

• Quando $x \to 0$ si può approssimare: $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ (una parabola).

Andamento asintotico

L'andamento di due funzioni f, g per $x \to (\pm)\infty$, agli estremi del campo di esistenza $\mathbf{R}$, si confronta attraverso il calcolo dei limiti:

$$\lim_{x\to\infty} f - g \quad \mathbf{e/o} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f}{g}.$$

Esempi

1. La funzione $f(x) = x + \frac{1}{x}$ per valori 'grandi' di x si comporta come $g(x) = x$, ovvero si può scrivere $f \approx x$ per $x \to \infty$: infatti

$$\lim_{x\to\infty} f - g = \lim_{x\to\infty} (x + \frac{1}{x}) - x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0\,.$$

Si dice anche che $y = x$ è un *asintoto* (linea asintotica) per y_1.

2. La funzione $y_1 = \dfrac{x}{1+x}$ ha come asintoto la retta $y = 1$; infatti è:

$$\lim_{x\to\infty} y_1 - y = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} - 1 = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{1+x} = 0$$

3. Le funzioni $y_1 = x^3 - x$ e $y_2 = x^2 + 100$ sono infinite per $x \to \infty$, ma poiché

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_1}{y_2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x}{x^2 + 100} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2} \frac{1 - \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{100}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

diciamo che y_1 è un infinito di *ordine superiore* rispetto a y_2; al contrario si dice che y_2 è un infinito di *ordine inferiore* rispetto a y_1 perché $\lim_{x\to\infty} \dfrac{y_2}{y_1} = 0$.

4. L'interesse semplice è la somma aggiuntiva da pagare dopo un anno su un capitale C. Il montante C' è la somma di capitale più interesse; in termini algebrici:

$$C' = C + tC = C(1 + t)$$

dove t è il tasso di interesse, di solito espresso come una percentuale. Ad esempio se $C = 100$ L dopo un anno al tasso del

5.5% si hanno $100+100\times\frac{5.5}{100}=100\times 1.055=105.5$ L. Supponiamo ora, per comodità, che il capitale sia 1 (unitario, come nelle tabelle per calcolare gli interessi), e che tasso di interesse sia del 100% annuo.

Allora dopo un anno, 1 Lira diventano 2 Lire. C'è comunque la possibilità di guadagnare di più. Invece di chiedere il 100% annuo, si può chiedere il 50% ogni sei mesi (capitalizzazione semestrale). Si ha:

C iniziale	dopo sei mesi	dopo un anno
1	$1+1\times 0.5=1.5$	$1.5+1.5\times 0.5=2.25$

Ancor più si ottiene capitalizzando, cioè reinvestendo gli interessi, al 25% ogni 3 mesi. Il capitale iniziale $C=1$ diviene, trascorsi

tre mesi	sei mesi	nove mesi	dodici mesi
$1+1\times 25\%=1.25$	$1.25+1.25\times 0.25\approx 1.56$	$1.56\times 1.25\approx 1.95$	$1.95\times 1.25\%=2.44$

È possibile generalizzare i risultati di questi, per così dire, esperimenti numerici.

- L'interesse composto si calcola a partire dall'interesse semplice: dopo un anno è $C_1=C+tC$, dopo un altro anno è:

$$C_2=C_1+tC_1=C+tC+t(C+tC)=C+2tC+t^2C=C(1+t)^2$$

e alla fine del terzo anno

$$C_3=C(1+t)^2\times(1+t)=C(1+t)^3\,,$$

in generale dopo n anni $C_n=C(1+t)^n$.

Ora se si suddivide il tasso $t=1$ (il 100%) in n parti e allo stesso tempo si sudddivide l'anno sempre in n parti uguali si ottiene:

$$C'=C\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \frac{C'}{C}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

In tabella i valori di questa funzione per alcuni n:

n	10	100	1 000	10^4	10^5	10^6
C'/C	2.594	2.705	2.717	2.7181	2.71827	2.71828

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \qquad (e\approx 2.718)$$

Il numero e di Eulero è valore-limite della *successione*, una funzione definita sui numeri naturali $\mathbf{N}$(un sottoinsieme di $\mathbf{R}$! ∞ è l'*unico* punto di accumuzione per i naturali $\mathbf{N}$).

Rapporto incrementale

Quando una funzione f è tale che esiste ed è finito il limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

che, posto $x - x_0 = \Delta x = h$, scriveremo anche nelle forme:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{oppure} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

si dice che f è *derivabile* in x_0. Il limite del *rapporto incrementale*:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

è la *derivata* di f in x_0 e si scrive $f'(x_0)$ oppure y'_{x_0} oppure $\frac{df}{dx}\big|_{x_0}$.

NB: se f è derivabile in un punto x_0, lì è anche continua, ma il reciproco di questa affermazione non è sempre vero, come nel caso della funzione $|x|$ che è continua in $x = 0$, ma lì non è derivabile, non essendo possibile assegnare un solo valore per il limite. Infatti è:

$$\frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \quad \to \begin{cases} +1 & \text{per } \Delta x \to 0+ \\ -1 & \text{per } \Delta x \to 0- \end{cases}$$

Il fatto che una funzione sia continua è allora condizione *necessaria* ma *non sufficiente* per la derivabilità.

- Il rapporto incrementale

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

rappresenta la pendenza della retta secante al grafico per i punti $\big(x, f(x)\big)$ e $\big(x_0, f(x_0)\big)$. La posizione - limite per la secante quando $x \to x_0$ è la retta tangente e allora la derivata è la pendenza della tangente al grafico in x_0. È questo il significato geometrico della derivata. La retta con equazione:

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \text{ovvero} \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

è la tangente al grafico nel punto x_0.

Esempi

1. La derivata di $f(x) = c$ (costante) è $f'(x) = 0$, essendo

$$\Delta f = c - c = 0.$$

2. La funzione $f(x) = x$ è derivabile e vale $f'(x_0) = 1$. È:

$$\Delta f = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x \quad \text{da cui} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

3. La funzione $f(x) = x^2$ è derivabile e vale $f'(x_0) = 2x_0$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$$

4. La funzione $f(x) = x^3$ è derivabile e vale:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$$
$$\frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2.$$

Allora per $\Delta x \to 0$ è $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 3x^2$

5. La funzione $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ si può derivare in un $x_0 \neq 0$ e la sua derivata lì vale:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right) \frac{1}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{x_0 - x}{(x - x_0)xx_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} -\frac{1}{xx_0} = -\frac{1}{x_0^2} \end{aligned}.$$

6. La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è derivabile in $x_0 \neq 0$ e vale:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x_0})^2} = \\ &\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}. \end{aligned}$$

La funzione $\sqrt{x}$ non è derivabile in $x = 0$ innanzitutto perchè lì il limite del rapporto incrementale esiste solo per $x \to 0+$. Anche considerando questa derivata *unilaterale* ancora il limite non esiste perchè il rapporto incrementale diverge (a $+\infty$) per $x \to 0+$. La tangente alla curva coincide con l'asse Y.

7. La derivata di $\sin x$ in $x_0 = 0$ vale 1, dato che per $x \neq 0$ è:

$$\frac{\sin x - \sin(0)}{x - 0} = \frac{\sin x}{x} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

8. La funzione esponenziale a^x $(a > 0)$ è derivabile in $x_0 = 0$, come si può intuire dal grafico. La pendenza della tangente in 0 per $y = 2^x$ è minore di 1, mentre quella per $y = 3^x$ è maggiore di 1; tra due e tre sta un certo numero e tale che la pendenza di e^x nell'origine è proprio 1. Si può dire che probabilmente e coincide con il numero di Eulero $e = 2.71828\ldots$; in questo caso deve essere:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

e ricordando che $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to \infty$ si può anche riscrivere:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Allora per n grande vale l'eguaglianza approssimata:

$$\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \approx 1 \quad \to \quad e^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{1}{n} \quad \text{cioè} \quad e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

espressione per e come limite per $n \to \infty$.

9. La funzione esponenziale (naturale) e^x è derivabile $\forall x \in \mathbf{R}$ poiché:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} e^{x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0},$$

per l'esempio precedente.

Funzioni derivate

Se f è una funzione derivabile per tutti gli x in un certo intervallo, allora per ogni x esiste f'; chiamiamo questa funzione la *funzione derivata* o in breve la derivata di f.

Esempi

1. Nei precedenti esempi 1…5 notiamo una certa regolarità; una tabella mostra che:

n	3	2	1	0	-1
x^n	x^3	x^2	x	x^0	x^{-1}
derivata	$3x^2$	$2x$	1	0	$-x^{-2}$
coeff.	3	2	1	0	-1
potenza	2	1	0	…	-2

Possiamo concludere che la (funzione) derivata di $f(x) = x^n$ è $f'(x) = nx^{n-1}$. Dimostriamo quanto appena detto per n numero naturale ($n \in \mathbf{N}$) con la scomposizione:

$$x^n - x_0^n = (x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})$$

per $x \neq x_0$ si ha:

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}}_{n \text{ termini}}$$

e passando al limite per $x \to x_0$ si ottiene $f' = nx_0^{n-1}$.

Questo risultato ottenuto per n naturale vale in generale per n razionale ($n \in \mathbf{Q}$); ad esempio per $n = \frac{1}{2}$ si ha:

$$f = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \to f' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. La derivata di $\sin x$ è $\cos x$. Si pone $x - x_0 = h$, allora è

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}.$$

Applicando la formula di addizione per $\sin x$ si ha:

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x;$$

il rapporto incrementale si scrive perciò:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x(\cos h - 1) + \sin h \cos x}{h}$$

per $h \to 0$ anche $(\cos h - 1) \to 0$ come h^2, mentre $\frac{\sin h}{h} \to 1$ e allora il limite del rapporto incrementale vale $\cos x$

Aritmetica della derivazione

Il calcolo della derivata procede come il calcolo di un limite e allora possiamo applicare ad esso i teoremi della aritmetica dei limiti. Valgono le regole:

- $(f+g)' = f' + g'$, la derivata della somma è pari alla somma delle derivate, e
- $(af)' = af'$, dove a è un numero reale.

Da quanto appena detto appare che la derivazione è una operazione lineare.

Esempi

1. $f = 3x^2 - 5x + 2 \quad \rightarrow \quad f' = 6x - 5$

2. $f = x + \dfrac{1}{x} \quad \rightarrow \quad f' = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

3. $\big(f(x) + c\big)' = f'(x) + (c)'$, ma $(c)' = 0$ (derivata di una costante) e allora $(f(x)+c)' = f'(x)$: la derivata di una funzione non cambia quando si somma una qualsiasi costante alla funzione stessa e quindi funzioni traslate in direzione Y hanno la stessa (funzione) derivata. La derivata f', cioè la funzione che descrive il tasso istantaneo di variazione di f, è indifferente al valore in sé di f in un punto, ma è sensibile alla *differenza* tra questo valore e quello in un punto vicino.

4. Per la derivata del prodotto si ricorre ad un po' di algebra:

$$\begin{aligned}
\Delta(f\cdot g) =& f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f\cdot g = \\
=& f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)\cdot g + \\
&+ f(x+\Delta x)\cdot g - f\cdot g = \\
=& f(x+\Delta x)\cdot[g(x+\Delta x) - g] + g\cdot[f(x+\Delta x) - f] \\
=& f(x+\Delta x)\cdot \Delta g + g\cdot \Delta f.
\end{aligned}$$

Ora, dividendo per Δx, si ha:

$$\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = f(x+\Delta x)\cdot\frac{\Delta g}{\Delta x} + g\cdot\frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Il limite per $\Delta x \rightarrow 0$ dà: $(f\cdot g)' = f'\cdot g + g'\cdot f$.

5. Con un procedimento analogo si ricava la derivata di $\frac{f}{g}$ come

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

6. $(x^2)' = (x\cdot x)' = 1x + 1x = 2x$.

7. Generalizzando

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = 1x^n + xnx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

8. $\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' = \dfrac{0 \cdot (1+x^2) - 1 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}.$

9. $(x \sin x)' = 1 \sin x + x \cos x = \sin x + x \cos x$

10. Derivata di $\tan x$.

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot - \sin x}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

11. $\left(xe^x\right)' = 1e^x + xe^x = (1+x)e^x.$

Derivazione di funzioni composte

Siano f, g due funzioni derivabili. Con la composizione otteniamo la funzione composta $f \circ g = f(g(x))$. Per la derivata di $f \circ g$ otteniamo:

$$\frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big)}{x - x_0} = \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big)}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e per $x \to x_0$ si ha $\big(f(g)\big)' = f' \cdot g'$ che si scrive anche

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}.$$

- Intuitivamente: la velocità totale è il prodotto delle velocità.

Esempi

1. Sia $f(g) = (2x-1)^3$; qui è $f = g^3$ e $g = 2x - 1$. Si ha:

$$(8x^3 - 12x^2 + 6x - 1)' = 24x^2 - 24x + 6 = 6(4x^2 - 4x + 1)$$
$$3g^2 \cdot g' = 3(2x-1)^2 \cdot 2 = 6(2x-1)^2.$$

2. Sia $y = e^{-x^2}$; qui $f = e^g$ e $g = -x^2$. Allora

$$y' = f' \cdot g' = e^g \cdot -2x = -2xe^{-x^2} .$$

Derivata della funzione inversa

Dalla regola di derivazione per le funzioni composte si ottiene la regola per la derivata della funzione inversa, nota che sia la derivata della funzione. Occorre ricordare che $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = x$. Risulta:

$$(f \circ f^{-1})' = 1 \quad \text{e cioè} \quad f' \cdot (f^{-1})' = 1, \quad \text{allora} \quad (f^{-1})' = \frac{1}{f'} .$$

Esempi

1. Per $x \geq 0$ sia $f(x) = x^2$; allora $f^{-1} = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Deve anche essere $(\sqrt{x})^2 = x$, allora:

$$\big((\sqrt{x})^2\big)' = 2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' = 1 \quad \text{da cui segue} \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} ,$$

un risultato già ottenuto per altra via.

2. La funzione logaritmo naturale $\ln x$ è la funzione inversa dell'esponenziale e^x. Infatti per definizione $e^{\ln x} = x$. Si ha:

$$\left(e^{\ln x}\right)' = e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = x \cdot (\ln x)' = 1, \text{ segue } (\ln x)' = \frac{1}{x}\,.$$

Una tavola delle derivate più comuni

Si possono condensare gli esempi visti in una tavola che contiene le derivate delle funzioni elementari:

f	x^n	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	e^x	$\ln x$
f'	nx^{n-1}	$\cos x$	$-\sin x$	$1/\cos^2 x$	e^x	$1/x$

Differenziale

Consideriamo la retta tangente al grafico di una funzione in un punto $T(x_0, f(x_0))$. Per piccoli spostamenti rispetto al punto T, la retta tangente si scosta poco dal grafico di $f(x)$. Si può pensare quindi di *approssimare* i valori di $f(x)$ nei punti x vicini a x_0 con i valori calcolati sulla tangente $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Allora

$$f(x) \approx y \quad \text{ovvero} \quad f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Quindi $\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$ se pensiamo in termini dell'incremento $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ di f calcolato per un incremento $\Delta x = x - x_0$.

Dunque, in questa approssimazione

• $\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$: l'incremento della funzione è sostituito da un termine lineare, direttamente proporzionale a Δx. È evidente la semplificazione del calcolo.

• $\Delta f \approx a\Delta x$, con $a = f'(x_0)$; la costante di proporzionalità è la derivata in x_0. Quindi stimiamo l'incremento Δf nei punti vicini a x_0 con il prodotto

$$\text{tasso di variazione in } x_0 \times \text{incremento } \Delta x.$$

• Questo procedimento di *linearizzazione* della funzione si può applicare in punti in cui esiste la tangente, quindi alle funzioni derivabili.

• Manca una stima della 'bontà' dell'approssimazione (ovvero dell'errore). Per questo punto, poichè $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, l'errore deve essere infinitesimo d'ordine *superiore* rispetto a Δx, cioè con termini in $\Delta^2 x, \Delta^3 x$, ecc.. Quindi deve essere possibile scrivere

$$\Delta f = a\Delta x + \text{termini in } \Delta^2 x, \Delta^3 x, \ldots$$

Chiamiamo

• *differenziabile* una funzione f per cui, a meno di infinitesimi di ordine superiore, la *parte principale* dell'incremento, il *differenziale* df è direttamente proporzionale a $dx = \Delta x$, cioè $df = a\,dx$ (dx è il differenziale di x).

• Vale $a = f'(x_0)$. Una funzione è derivabile se e solo se è differenziabile. Le due proposizioni si equivalgono.

Antiderivazione

Data una funzione $f(x)$ ci si può chiedere di quale funzione $F(x)$ essa sia la derivata. Questo problema, di grande importanza pratica, si risolve elementarmente consultando in senso inverso la tabella della derivate. Chiamiamo F la (funzione) *primitiva* in contrasto con derivata per f.

Esempi

1. Sia da trovare la primitiva di $f(x) = x^2$. È $(x^3)' = 3x^2$ cosicché $x^2 = (\frac{x^3}{3})'$ e una risposta possibile per la primitiva cercata è $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

• Questa è solo una delle possibili primitive di f: poiché la derivata di una costante è nulla, qualunque funzione scritta come $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, con C costante arbitraria, è ancora una primitiva di f. Quest'ultimo modo di scrivere la primitiva è generale: rappresenta una famiglia di funzioni aventi tutte come derivata $f(x)$.

2. La primitiva di $\cos x$ è $\sin x + C$.

3. La primitiva di e^x è $e^x + C$.

4. La primitiva di $\dfrac{1}{x}$ per $x > 0$ è $\ln x + C$.

5. Nel moto uniforme è $\frac{dS}{dt} = v_0$ dove con v_0 si intende che la velocità è costante. La primitiva è quindi $S(t) = v_0 t + S_0$; la costante S_0 indica la posizione iniziale.

6. Nel moto naturalmente accelerato è $\frac{dv}{dt} = g$, con $g = 9.8\ \mathrm{m/s}^2$, accelerazione di gravità. La velocità è $v(t) = gt + v_0$ dove la costante v_0 è la velocità iniziale. La primitiva della velocità è $S(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + S_0$.

• I parametri g, v_0, S_0 determinano completamente il moto; è allora possibile conoscerne l'evoluzione in ogni istante.

Applicazioni del calcolo differenziale

Andamento delle funzioni

Spesso si traducono problemi reali in modelli matematici. Altrettanto spesso i modelli sono delle (opportune) funzioni. Studiando il comportamento della funzione (il modello matematico del problema) si ottengono informazioni sul fenomeno reale.

Limiti e continuità offrono strumenti per determinare zeri, comportamento asintotico, salti, ecc. Il calcolo differenziale va nel dettaglio e offre una visione dell'andamento *locale*: si determinano gli intervalli dove $f(x)$ cresce/decresce, la velocità di crescita in questi intervalli e i punti in cui è stazionaria, ovvero non cresce ne' decresce.

Queste diverse situazioni individuano valori o intervalli in cui si verificano le condizioni imposte al problema.

• Si esamina il segno della derivata: negli intervalli in cui è $f' > 0$, là f è crescente, al contrario decrescente dove $f' < 0$.

• I punti in cui $f' = 0$ si dicono *stazionari* e possono essere punti di massimo o di minimo relativi, oppure flessi, quando la tangente (orizzontale !) attraversa il grafico della funzione.

• Tutte queste informazioni si possono ottenere risolvendo la disequazione $f' \geq 0$. I punti di massimo relativo sono individuati dalla sequenza 'crescente - stazionaria - decrescente', mentre quelli di minimo dal susseguirsi di 'decrescente - stazionaria - crescente'.

Allora l'andamento di una funzione si studia con l'aiuto della (funzione) derivata.

Esempi

1. Per la parabola $y = x^2 + 1$ si pone $y' = 2x \geq 0$. In $x = 0$ vi è un minimo relativo (e assoluto !).

• Allora la funzione $1/y$ lì ha ...?

2. Poiché $y' = 3x^2$ e quindi $y'(0) = 0$, la tangente a $y = x^3$ nell'origine coincide con l'asse X e attraversa il grafico. Nel punto $x = 0$ vi è un flesso. Lì il grafico cambia *curvatura*.

3. L'equazione $x^3 + x - 1 = 0$ ha una soluzione in $]0, 1[$. Posto $y = x^3 + x - 1$, è $y(0) = -1$, $y(1) = 1$ (teorema di Bolzano). La derivata $y' = 3x^2 + 1 > 0$, $\forall x$, allora y è monotona crescente, la soluzione è anche unica.

4. L'equazione $x^3 - 3x - 5 = 0$ ha una soluzione in $]2, 3[$. Posto $y = x^3 - 3x - 5$ è $y(1) = -7$, $y(2) = -3$, $y(3) = 13$. Per la derivata $y' = 3x^2 - 3$ vale $y' \geq 0$ per $x \geq 1$ e $x \leq -1$. Allora

• $f(x)$ è crescente in $]2, 3[$, in questo intervallo vi è una sola soluzione;

• il punto $x = 1$ è di minimo con $y(1) = -7$

• il punto $x = -1$ è di massimo con $y(-1) = -3 < 0$. Si può schizzare il grafico. Non vi sono altre soluzioni.

5. Trovare due numeri la cui somma sia 10 e il prodotto il più grande possibile. Siano x, y i due numeri. Apparentemente due variabili, in realtà una sola. Se $x + y = 10$, allora $y = 10 - x$. Il problema si traduce nella ricerca del massimo per la funzione $y = x(10 - x) = 10x - x^2$ (una parabola). È $y' = 10 - 2x$ e $y' \geq 0 \iff x \leq 5$, qui $x = 5$ è il punto di massimo (assoluto) con $y(5) = 25$.

6. Dimostrare che la somma di un qualsiasi numero reale positivo con il suo reciproco vale almeno due. Il problema si traduce nel mostrare che la funzione $y = x + \frac{1}{x}$ definita in $\mathbf{R}^+$ ha come valore minimo proprio $y = 2$.

• Si ricerca il punto di minimo imponendo $y' \geq 0$. È:

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} \quad \text{allora} \quad y' \geq 0 \iff x^2 - 1 \geq 0 \iff x \geq 1\,.$$

Dunque per $x < 1$ la funzione decresce, per $x = 1$ è stazionaria, per $x > 1$ è crescente; il punto $x = 1$ è un punto di minimo assoluto e lì vale appunto $y(1) = 2$.

7. Il valor medio $\overline{a} = \dfrac{\sum a_i}{n}$ di n valori misurati a_i, $i = 1, n$ rende mimima la somma σ dei quadrati degli scarti $\Delta_i = a_i - \overline{a}$.

• Questo fatto giustifica la scelta del valor medio, cioè della media aritmetica dei valori misurati, come valore più attendibile per il risultato di n misure.

Si scrive allora la somma $\sigma(x)$ del quadrato degli scarti calcolati rispetto a un qualsivoglia valor medio x e poi si cerca il minimo di $\sigma(x)$. Allora

$$\sigma(x) = \sum(a_i - x)^2 = \sum(a_i^2 - 2xa_i + x^2).$$

Derivando σ rispetto a x si ha

$$\sigma' = \sum(0 - 2a_i + 2x) = 2nx - 2\sum a_i = 0 \quad \text{per} \quad \sum a_i = nx$$

ovvero la definizione di x come media aritmetica degli a_i (i valori misurati!) Occorre ricordare che

- le quantità a_i sono delle *costanti* date, quindi $\dfrac{da_i}{\mathrm{d}x} = 0$;
- $\sum_{i=1}^{n} x = nx$ è per definizione il prodotto $n \times x$.

Ottimizzazione

Un frequente problema che si incontra nella progettazione è quello della ricerca dei valori delle grandezze in gioco che corrispondono alla migliore scelta in termini, ad esempio, di caratteristiche meccaniche o di risparmio di materiale. Trovare i punti stazionari (minimi o massimi) della funzione che formalizza il problema fornisce la soluzione ottimale cercata.

Esempi

1. In generale per gli elementi strutturali a sezione rettangolare (travi, puntoni) di base b e altezza h la resistenza a compressione è proporzionale all'area della sezione retta

$$R_c \propto S = bh,$$

mentre la resistenza a flessione è proporzionale alla base e al quadrato dell'altezza

$$R_f \propto bh^2.$$

Si chiede di stabilire le proporzioni h/b della sezione della trave di:

a) massima resistenza a compressione,
b) massima resistenza a flessione,

che si può ricavare da un tronco cilindrico di diametro d.

- Questo ultimo dato costituisce il vincolo che lega b e h: deve essere $b^2 + h^2 = d^2$ (teorema di Pitagora). Le quantità b, h **non** sono due variabili *indipendenti* ! Qui si chiede di *ottimizzare* l'uso del materiale a disposizione: il taglio del tronco verrà fatto in dipendenza dell'uso a cui è destinata la trave. Si ha:

a) $R_c \propto bh = b\sqrt{d^2 - b^2}$, allora

$$R_c' = \sqrt{d^2 - b^2} + b\frac{-2b}{2\sqrt{d^2 - b^2}} = \frac{d^2 - 2b^2}{\sqrt{d^2 - b^2}}.$$

b) $R_f \propto bh^2 = b(d^2 - b^2)$, allora

$$R_f' = d^2 - b^2 + b(-2b) = d^2 - 3b^2.$$

Per $0 < b < d$ le funzioni sono entrambe positive, sono nulle per $b = 0, d$, quindi esiste un massimo. Infatti:

$$R'_c = 0 \iff d^2 - 2b^2 = 0 \iff b = d\frac{\sqrt{2}}{2},\ h = d\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{h}{b} = 1.$$

$$R'_f = 0 \iff d^2 - 3b^2 \geq 0 \iff b \leq d\sqrt{\frac{1}{3}},\ h = d\sqrt{\frac{2}{3}},\ \frac{h}{b} = \sqrt{2}.$$

Nel caso di una trave in compressione (puntone) le proporzioni della sezione più resistente sono quelle un quadrato, ovvero del più grande rettangolo che si può ricavare da (inscrivere in ...) un cerchio, mentre per una trave a flessione (solaio o architrave) conviene la sezione rettangolare con $h/b = \sqrt{2} \approx 1.4$. Nei fatti questo implica un certo scarto di materiale, compensato dal fatto che la trave rettangolare è circa il 10% più resistente a flessione e circa il 6% meno pesante della trave quadrata ricavata dallo stesso tronco. Verificate questo fatto !

2. Si vuole progettare un contenitore cilindrico (una lattina, una scatola per pomodori, ecc.) di capacità (volume) assegnata. Si chiede di trovare le proporzioni del cilindro che rendono minima la quantità di materiale (latta, alluminio, ...) usato.

• Si tratta di rendere *minima* la superficie totale di un cilindro di volume assegnato (una costante, cioè !). Il problema potrebbe essere posto anche nella forma di trovare, per una certa quantità assegnata di latta, le proporzioni che rendono *massimo* il volume del cilindro. Esaminiamo in successione i due problemi.

Siano r il raggio, h l'altezza del cilindro. Allora nel primo caso è

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad \text{con} \quad V = \pi r^2 h \quad \text{costante},$$

mentre nel secondo

$$V = \pi r^2 h \quad \text{con} \quad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad \text{costante}.$$

Si tratta di trovare il rapporto h/r che nel primo caso rende minima la superficie S, nel secondo rende massimo il volume V. Vi sono due incognite r e h, legate però da una relazione che esprime il fatto che rispettivamente volume e superficie sono dati. Ricaviamo h nei due casi

$$V = \pi r^2 h \Longrightarrow h = \frac{V}{\pi r^2} \qquad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h \Longrightarrow h = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r}.$$

Allora nel primo caso

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}$$

una espressione simile è stata già vista. Deriviamo rispetto r:

$$S' = \pi r - \frac{V}{r^2} \quad \text{e poniamo} \quad S' = 2\pi r - \frac{V}{r^2} = 0.$$

Sostituiamo a V la sua espressione:

$$2\pi r = \frac{V}{r^2} \quad \text{diviene} \quad 2\pi r = \frac{\pi r^2 h}{r^2} = \pi h \quad \text{ovvero} \quad 2r = h.$$

• Il cilindro che rende minima la superficie totale per un volume assegnato ha l'altezza pari al diametro, quindi una sezione retta passante per l'asse del cilindro ha la forma di un quadrato.

Nel secondo caso si deriva V sempre rispetto a r

$$V = 2\pi r^2 \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} = Sr - 2\pi r^3 \quad \rightarrow \quad V' = S - 6\pi r^2$$

Sostituiamo a S la sua espressione e poniamo $V' = 0$:

$$V' = 2\pi r^2 + 2\pi r h - 6\pi r^2 = 2\pi r h - 4\pi r^2 = 0 \quad \text{per} \quad h = 2r.$$

lo stesso risultato appena ottenuto per il problema di minimizzare la superficie totale. I problemi di questo tipo si dicono *duali*.

Approssimazioni

Il differenziale $df = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$ approssima l'incremento Δf della funzione $f(x)$ in prossimità di un punto x_0 dove f sia facilmente calcolabile. È il primo livello di approssimazione, quella lineare ($df \propto \mathrm{d}x$), in molti casi sufficiente per stimare una quantità senza svolgere calcoli onerosi.

Esempi

1. Si vuole ricavare un valore approssimato per $\sqrt{10}$. Qui si tratta di trovare il differenziale di $f = \sqrt{x}$; poichè $10 = 9 + 1$ e $\sqrt{9} = 3$, sarà $x_0 = 9$ e $\mathrm{d}x = 1$. Si ha allora

$$\sqrt{10} - 3 = \Delta f \approx df = f'(x_0)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 1 = \frac{1}{6} \approx 0.166$$

Quindi $\sqrt{10} \approx 3.166$. Calcolatore $3.162\ldots$

2. Si vuole ricavare un valore approssimato per $\sqrt[3]{7}$. Qui si tratta di trovare il differenziale di $f = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$; poichè $7 = 8 - 1$ e $\sqrt[3]{8} = 2$, sarà $x_0 = 8$ e $\mathrm{d}x = -1$. Si ha allora

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{7} - 2 = \Delta f \approx df =& f'(x_0)\,\mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} \cdot (-1) = -\frac{1}{12} \approx -0.08.\end{aligned}$$

Quindi $\sqrt[3]{7} \approx 1.92$. Calcolatore $1.91\ldots$

• Confrontando i valori, risulta che In questi due primi esempi l'errore di approssimazione è positivo. Perché?

3. Trovare un valore *approssimato* per $\tan 46°$. È $\tan 45° = 1$, $x_0 = \pi/4$ e, poiché un grado corrisponde a $\pi/180$, è $\mathrm{d}x \approx 0.0174$.

$$\begin{aligned}\tan 46° - 1 = \Delta f \approx df =& f'(x_0)\,\mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{\cos^2 45°}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot 0.017 = 0.035\end{aligned}$$

Quindi $tg46° \approx 1.035$. Calcolatore $1.036\ldots$

4. Si vuole approssimare linearmente la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ in prossimità del punto $x = 1$. Si tratta di approssimare il calcolo del reciproco di un numero quando questo è poco diverso da 1. Si trova il differenziale di f:

$$df = f'(1)\,\mathrm{d}x \quad \text{ovvero} \quad df = -\frac{1}{1^2}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}x.$$

Allora

$$f(1 + \mathrm{d}x) = \frac{1}{1 + \mathrm{d}x} \approx f(1) + df = 1 - \mathrm{d}x$$

Ad esempio $\frac{1}{0.98} = \frac{1}{1-0.02} \approx 1 - (-0.02) = 1.02$. Qui $\mathrm{d}x = -0.02$.

• L'errore è proporzionale a $\mathrm{d}x^2$: da

$$\frac{1}{1 + \mathrm{d}x} \approx 1 - \mathrm{d}x \quad \text{segue} \quad (1 + \mathrm{d}x)(1 - \mathrm{d}x) = (1 - \mathrm{d}x^2) \approx 1.$$

Ad esempio, se $\mathrm{d}x = 5 \times 10^{-2}$ è $\mathrm{d}x^2 = 2.5 \times 10^{-3}$, più di un ordine di grandezza inferiore.

5. L'elemento principale di una lampada per esterni è una bolla di polietilene traslucido di diametro $D = 35$ cm e spessore 2 mm. Valutare la massa della lampada. Si ricorda che massa = volume $\times$densità e che il polietilene ha densità ≈ 1 kg/dm^3.

Il volume della bolla è delimitato da due sfere concentriche. Il volume di questo guscio si può approssimare con il differenziale del volume della sfera esterna di cui si conosce il diametro.

- $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, $dV = 4\pi r^2 dr$ e $dr = 0.2$ (misure in cm).

  Calcoli. $dV = \pi \cdot 35^2 \cdot 0.2 \approx 0.77$ dm^3. Pesa circa 0.8 kg.

- Intuitivamente il volume del guscio è *approssimativamnte* pari al prodotto della superficie della sfera $4\pi r^2$ per lo spessore Δr del guscio.

Velocità collegate

Esempio

Un nastro trasportatore scarica sabbia su un mucchio di forma conica. La sabbia si assesta formando un cono in cui il raggio è costantemente uguale all'altezza. Se si versa sabbia alla velocità di 0.1 m^3 al minuto, con che velocità si allarga il cono quando il suo raggio è 2 m ?

Un tipo di problema in cui due grandezze sono legate da una corrispondenza (funzione) nota. Si chiede di valutare la velocità con cui varia l'una conoscendo la velocità dell'altra.

In questo caso il legame tra il volume del cono, il raggio r e l'altezza h è dato da $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

- Uno stesso tipo di sostanza forma coni di cui è noto l'angolo (figura) alla base; allora altezza e raggio sono in rapporto costante e in questo esempio supponiamo che l'angolo sia 45°. Quindi in ogni istante l'altezza è pari al raggio e il volume dipende *solo* dal raggio come $V = \frac{1}{3}\pi r^3$.

Versando sabbia sul cono, il volume aumenta nel tempo e quindi aumentano il raggio e l'altezza. Il punto è che il volume dipende dal raggio, ma entrambi dipendono dal tempo. Occorre tener presente che si parla di velocità (istantanea !!): aggiungendo la stessa quantità di sabbia quando il cono è piccolo, l'aumento di dimensioni sarà vistoso e al contrario a malapena visibile su un mucchio di grandi dimensioni. Allora è necessario fissare la situazione, il momento in cui calcoliamo la velocità: qui ciò corrisponde a fissare il raggio del cono.

La velocità con cui aumenta il volume rispetto al tempo è proporzionale alla velocità con cui il volume varia rispetto al raggio **e** alla velocità con cui il raggio varia rispetto al tempo. Da

$$\frac{dV}{dt} \propto \frac{dV}{dr} \quad \text{e} \quad \frac{dV}{dt} \propto \frac{dr}{dt} \quad \text{segue} \quad \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\,\frac{dr}{dt}$$

dove si riconosce la derivazione di una funzione composta.

- Infatti $V = V(r)$, ma $r = r(t)$ e quindi $V(r(t))$.

  Calcoli. Qui è

$$\frac{dV}{dt} = 0.1\ \ \mathrm{m}^3/\mathrm{min}, \qquad \frac{dV}{dr} = \frac{1}{3}\pi 3r^2 = \pi r^2.$$

La derivata va calcolata per $r = 2\,\mathrm{m}$, quindi $\frac{dV}{dr}\Big|_{r=2} = 4\pi$. Risulta

$$0.1 = 4\pi\frac{dr}{dt}, \quad \text{cioè } \frac{dr}{dt} = \frac{0.1}{4\pi} \approx 0.008\,\mathrm{m/min},$$

il raggio cresce meno di un cm al minuto.