Integrazione

Si vuole calcolare l'area della superficie compresa tra l'asse X e il grafico delle parabola $y = x^2$ nell'intervallo $[0, 1]$.

In generale, per qualsiasi intervallo $[a, b]$ si ha che l'area del trapezoide $ABCD$ è *minore* dell'area del rettangolo di base $b-a$ e altezza il massimo della funzione in $[a, b]$ e *maggiore* dell'area del rettangolo di stessa base $b - a$ e altezza il minimo della funzione in $[a, b]$. Si può scrivere:

$$(b-a)\min f \leq \text{ area sotto il grafico } \leq (b-a)\max f$$

Se nel problema iniziale si suddivide il tratto $[0, 1]$ in n intervalli uguali, a ciascuno di essi si possono applicare le considerazioni appena fatte. L'area da trovare è maggiore della somma delle aree di questi n rettangoli che si dicono *inscritti* e minore della somma delle aree di n rettangoliche si dicono *circoscritti*. La differenza è data dalla figura a 'dente di sega' che vale approssimativamente $\frac{1}{2}\frac{1}{n} \cdot (1-0) = \frac{1}{2n}$ e che $\to 0$ per $n \to \infty$. La base di questi rettangoli è la stessa e vale $1/n$, mentre per l'altezza, poiché x^2 è monotona crescente in $(0; 1)$, massimo e minimo valore della funzione si hanno negli estremi di ciascun intervallo (x_i, x_{i+1}). Allora

$$\begin{aligned}
\max(f) \quad &\text{in} \quad [0, \tfrac{1}{n}] = \left(\tfrac{1}{n}\right)^2\\
\min(f) \quad &\text{in} \quad [0, \tfrac{1}{n}] = \left(\tfrac{0}{n}\right)^2 = 0\\
\max(f) \quad &\text{in} \quad [\tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}] = \left(\tfrac{2}{n}\right)^2\\
\min(f) \quad &\text{in} \quad [\tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}] = \left(\tfrac{1}{n}\right)^2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\max(f) \quad &\text{in} \quad [\tfrac{n-1}{n}, \tfrac{n}{n}] = \left(\tfrac{n}{n}\right)^2 = 1\\
\min(f) \quad &\text{in} \quad [\tfrac{n-1}{n}, \tfrac{n}{n}] = \left(\tfrac{n-1}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

Segnamo con S^+ e S^- rispettivamente le somme delle aree dei rettangoli circoscritti e inscritti; queste valgono:

$$S^+ = \tfrac{1}{n}(\tfrac{1}{n})^2 + \tfrac{1}{n}(\tfrac{2}{n})^2 + \ldots + \tfrac{1}{n}(\tfrac{n-1}{n})^2 + \tfrac{1}{n}(\tfrac{n}{n})^2,$$

$$S^- = \tfrac{1}{n}(\tfrac{0}{n})^2 + \tfrac{1}{n}(\tfrac{1}{n})^2 + \ldots + \tfrac{1}{n}(\tfrac{n-2}{n})^2 + \tfrac{1}{n}(\tfrac{n-1}{n})^2.$$

Si raccoglie $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$

$$S^+ = \frac{1}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2\right],$$

$$S^- = \frac{1}{n^3}\left[0^2 + 1^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2\right].$$

Nelle parentesi compaiono le somme dei quadrati dei numeri naturali; queste si sanno calcolare: per la somma dei quadrati dei primi k numeri naturali $1, 2, 3, \ldots$ si ha:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Qui in un caso è $k = n$ e nell'altro $k = n - 1$ (0^2 non conta!). Allora:

$$S^+ = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\,, \qquad S^- = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$

Si intuisce che, all'aumentare del numero di suddivisioni, la somma delle aree dei rettangoli interni approssima sempre meglio l'area sotto il grafico, restando sempre un po' minore, mentre la somma delle aree dei rettangoli esterni analogamente approssima sempre meglio l'area sotto il grafico restando però sempre un po' maggiore.

Per $n \to \infty$ allora può essere che le somme S^+ e S^- convergano ad uno stesso limite S, cioé l'area sotto la curva. Il limite, se esiste, si dice *integrale definito* e si segna con

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$$

prolungando nel segno '$\int$' la 'S'[1] della somma. In questo caso, sviluppate le espressioni, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} S^+ = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \left[\tfrac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right] = \tfrac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} S^- = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \left[\tfrac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right] = \tfrac{1}{3}$$

e quindi si può scrivere:

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}$$

Il procedimento di suddivisione, calcolo delle aree e passaggio al limite si dice *integrazione secondo Riemann*; i punti $0, 1$ sono gli estremi a, b dell'intervallo di integrazione.

---

(1) Storicamente è questa l'origine del segno di integrale.

• Questo procedimento ricorda l'approssimazione dell'area del cerchio mediante poligoni inscritti e circoscritti. In realtà è più elementare: calcola l'area scomponendola in una somma delle uniche aree *direttamente* calcolabili, quelle dei rettangoli. In questo modo si estende l'idea di *misura* all'area di una qualsiasi regione piana.

• L'idea di approssimare l'area implica che questa esista e sia finita. Il passaggio allimite anche qui esprime il fatto che esiste, è possibile costruire una suddivisione per *ogni, comunque fissato* grado di approssimazione.

• Le suddivisioni regolari, in intervalli di ugual ampiezza, portano di solito a espressioni di cui è semplice trovare il limite, ma se si considerano *tutte* le (infinite) possibili suddivisioni appare che, in ogni caso, *necessariamente* le aree ad esse associate devono essere superiormente (ovvero inferiormente) limitate. Questo accade certamente se, nell'intervallo di integrazione (anche questo limitato!), la funzione è *limitata*. Quindi il procedimento si applica a funzioni limitate.

• Si esamina in dettaglio la dipendenza dell'area dagli estremi dell'intervallo di integrazione. Ad esempio, nell'espressione per S^+

$$S^+ = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \left[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2\right]$$

la base dei rettangolini vale $\frac{1}{n}$ ed è l'n - esima parte dell'intervallo $[0, 1]$. Se l'intervallo fosse $[0, b]$ si scriverebbe $\frac{b}{n}$; analogamente l'altezza del rettangolino nella prima suddivisione $[0, \frac{1}{n}]$ vale $(\frac{1}{n})^2$ e anche in questo caso sostituendo con $[0, \frac{b}{n}]$ si ottiene $f(\frac{b}{n}) = (\frac{b}{n})^2$. Allora

$$S^+_{[0,b]} = \frac{b}{n}\frac{b^2}{n^2} \left[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2\right]$$

e passando al limite:

$$\lim_{n\to\infty} S^+_{[0,b]} = \lim_{n\to\infty} b^3 \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \tfrac{1}{3}\, b^3$$

Un analogo risultato si ottiene per S^-, quindi si può scrivere:

$$\int_0^b x^2 \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\, b^3$$

Se pensa b come una variabile, allora l'area sotto la curva in $(0, b)$ è *funzione* di b; si può allora scrivere

$$F(x) = \int_0^x t^2 \,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{3}\, x^3$$

• Una funzione così definita si dice *funzione integrale*. Generalizzando

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

• L'integrale **non** dipende dalla variabile t, che si dice di integrazione, qui usata proprio per enfatizzare la dipendenza di F da x, estremo superiore dell'intervallo di integrazione.

• Se ora si considera l'integrale definito su un intervallo generico $[a, b]$ con $0 < a < b$ dalle figure si comprende come:

$$\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^b x^2\,\mathrm{d}x - \int_0^a x^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\,b^3 - \tfrac{1}{3}\,a^3,$$

e quindi, *in generale*,

$$\int_a^c x^2\,\mathrm{d}x = \int_a^b x^2\,\mathrm{d}x + \int_b^c x^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\,c^3 - \tfrac{1}{3}\,a^3$$

• Allora deve valere anche:

$$\int_a^a x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^a x^2\,\mathrm{d}x - \int_0^a x^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\,a^3 - \tfrac{1}{3}\,a^3 = 0$$

• Da ultimo, considerando *positivo* il verso di percorrenza del contorno della figura che lascia la superficie alla sua sinistra, poniamo anche

$$\int_a^0 x^2\,\mathrm{d}x = -\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x$$

• L'area calcolata in $[a, b]$ è equivalente a quella di un rettangolo di base $b - a$ e di una certa altezza. Si dice *valor medio* di $y = x^2$ nell'intervallo $[a, b]$ l'altezza del rettangolo. Così il calcolo dell'area 'sotto' una qualsiasi curva è ricondotto al calcolo dell'unica area direttamente calcolabile, quella del rettangolo. In questo esempio il valor medio in $[a, b]$ è:

$$\tfrac{1}{3}\,\frac{b^3 - a^3}{b - a} = \tfrac{1}{3}\,(a^2 + ab + b^2)$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Ragionando in termini di funzioni integrali si scrive l'integrale definito come la variazione della funzione integrale nell'intervallo $[a, b]$, ovvero

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Questa relazione riconduce il calcolo degli integrali definiti al calcolo di due valori di una certa funzione $F(x)$. Le funzioni integrali F andrebbero allora identificate caso per caso, ma è possibile dimostrare che

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)$$

Questo notevole teorema afferma l'identità tra funzione integrale e funzione primitiva di una funzione $f(x)$. In questo modo, almeno per alcuni tipi di funzioni, veniva ne 17° secolo risolto il secolare problema delle *quadrature*. Continuando con l'esempio $f(x) = x^2 \to F(x) = \frac{1}{3}\,x^3 + C$ e allora si scrive:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \tfrac{1}{3}\,\left[x^3\right]_a^b = \tfrac{1}{3}\,b^3 - \tfrac{1}{3}\,a^3$$

• Si dicono *integrabili* le funzioni che ammettono una primitiva. Il caso di una funzione discontinua o non derivabile in alcuni punti viene risolto spezzando l'intervallo d'integrazione in tratti dove la funzione è integrabile.

• Occorre far notare come l'andamento della primitiva (e quindi il valore dell'integrale) dipenda strettamente dal comportamento della funzione da integrare.

Esempi

Esempio 1. Calcolare l'area della regione compresa tra le curve $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ in $[0, 1]$. Dalla figura si ricava

$$S = \int_0^1 \left[x^2 - \sqrt{x}\right]\,\mathrm{d}x$$

• L'integrazione è lineare. Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ vale:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Allora

$$S = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \tfrac{1}{3}$$

• $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow \int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$. Quindi $\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$; segue $S = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Esempio 2. Calcolare l'area 'sotto' il grafico di $y = |x|$ in $[-1, 1]$. È necessario usare la definizione di $|x|$. Allora

$$\int |x|\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\frac{1}{2}\,x^2 + C & \text{per } x < 0, \\ \frac{1}{2}\,x^2 + C & \text{per } x \geq 0. \end{cases}$$

• La primitiva è continua (e derivabile!) *anche* in $x = 0$. Perciò le costanti di integrazione sono uguali. Verificare questo fatto. Allora

$$S = \left[-\tfrac{1}{2}\,x^2\right]_{-1}^0 + \left[\tfrac{1}{2}\,x^2\right]_0^1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1$$

Esempio 3. Trovare l'area della regione compresa tra i grafici di x, x^2, x^3, x^4, l'asse X e le rette $x = \pm a$, cioè in un intervallo *simmetrico* rispetto all'origine. Si ricava:

$\int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x^2 + C \qquad \int_{-a}^{a} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,(a^2 - a^2) = 0$

$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,x^3 + C \qquad \int_{-a}^{a} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,(a^3 - a^3) = \frac{2}{3\,a^3}$

$\int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,x^4 + C \qquad \int_{-a}^{a} x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,(a^4 - a^4) = 0$

$\int x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\,x^5 + C \qquad \int_{-a}^{a} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\,[a^5 - (-a^5)] = \frac{2}{5}\,a^5$

Inoltre $\int_{-a}^{a} |x| = 2\,\frac{a^2}{2}$, ecc. Allora l'area delle regioni in $[-a, a]$

• è *nulla* se n è dispari e in generale se $f(x)$ è una funzione dispari;

• vale $2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ se $f(x)$ è una funzione pari.

Esempio 4. Calcolare l'area sotto la curva $y = \sin x$ in $[0, \pi]$. Per la simmetria rispetto a $x = \pi/2$ si ha:

$$S = 2\int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = 2\left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} = 2$$

Esempio 5. Calcolare l'area del quarto di cerchio di raggio 1. La funzione che descrive il quarto di circonferenza è $y = \sqrt{1 - x^2}$ in$[0, 1]$. Allora

$$S = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

Questo integrale si calcola sostituendo $x = \sin t$.

• Segue $\sqrt{1 - x^2} \rightarrow \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$.

• Avendo cambiato, sostituito la variabile, occorre ricalcolare sia $\mathrm{d}x$ che diviene $\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin t) = \cos t\,\mathrm{d}t$, che

• gli estremi di integrazione, che risultano $0 = \sin t \iff t = 0$, $1 = \sin t \iff t = \pi/2$. Finalmente

$$S = \int_0^{\pi/2} \cos t \cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

L'identità trigonometrica $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$ permette una ulteriore e finale riscrittura

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}\left[\sin 2t\right]_0^{\pi/2}$$

Quest'ultimo termine è nullo (perché !?), e allora $S = \pi/4$.

Applicazioni del calcolo integrale - Lunghezza di curve

L'andamento del grafico di una curva $y = f(x)$ si può approssimare con una spezzata ottenuta collegando con segmenti i punti scelti sulla curva. La lunghezza della spezzata si trova applicando il teorema di Pitagora a ciascun segmento. In tal modo si approssima la lunghezza ℓ di un arco di curva in un intervallo a, b come la somma di n termini ℓ_i del tipo:

$$\ell_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

Se si considerano tutte le possibili spezzate si comprende come la lunghezza della curva sia l'estremo superiore della lunghezza delle spezzate. (Perché !?)

Se si passa al limite facendo tendere $\to 0$ l'ampiezza degli intervalli (quindi $n \to \infty$) allora si scrive

$$d\ell = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

e alle somme (discrete) si sostituisce l'integrale:

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

• **Oss.** Solitamente gli integrali di questo tipo sono di difficile calcolo, anche nel caso di funzioni elementari.

Esempio 6. Un caso elementarmente calcolabile è dato dalla parabola di Neile $y = x^{\frac{3}{2}}$. Per essa è $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ e $y'^2 = \frac{9}{4}x$. La lunghezza dell'arco di questa particolare parabola in $[0,1]$ vale

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1+\tfrac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x &= \tfrac{4}{9}\int_0^1 \sqrt{1+\tfrac{9}{4}x}\,d(1+\tfrac{9}{4}x)\\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left[\left(1+\tfrac{9}{4}\,x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{13}{27}\sqrt{13}\end{aligned}$$

Integrale indefinito

La ricerca della primitiva fa uso di diversi metodi che vengono trattati negli esempi che seguono.

Esempio 7. Calcolare

$$\int x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$$

Sostituendo $\sqrt{x-1} = t$ risulta

$$x = t^2 + 1 \quad \text{e} \quad \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$$

Allora

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x &= \int (t^2+1)t\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int (t^4+t^2)\,\mathrm{d}t\\ &= \tfrac{2}{5}t^5 + \tfrac{2}{3}t^3 + C = \tfrac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \tfrac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

Esempio 8. Calcolare

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5x-1}}$$

Posto $u = 5x+1$ è $\mathrm{d}u = 5\mathrm{d}x$ e

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5x-1}} = \tfrac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = \tfrac{1}{5}2\sqrt{u} + C = \tfrac{2}{5}\sqrt{5x-1} + C$$

• Le sostituzioni qui viste usano $x = g(t)$ oppure $u = p(x)$; con la prima si voleva eliminare una espressione contenente un radicale, nella seconda un radicale con argomento del tipo $ax+b$ viene ricondotto ad un'espressione piú semplice. Da ultimo, nell'esempio 4 si è usata una sostituzione trigonometrica del tipo $x = a\sin t$, utile per espressioni del tipo $\sqrt{a^2-x^2}$, che vengono cosí portate alla forma $a\cos t$.

Esempio 9. Calcolare

$$\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x$$

- L'integrazione per parti sfrutta la relazione

$$\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u \quad \text{ovvero}$$

$$uv = \int u\mathrm{d}v + \int v\mathrm{d}u \quad \text{ovvero} \quad \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

ottenuta dalla regola di derivazione del prodotto uv.

Ponendo $u = x^2$, $\mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x$ risulta $\mathrm{d}u = 2x$ e

$$\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x = x^2 e^x - 2\int x e^x \,\mathrm{d}x$$

Ripetendo l'operazione con $u = x$ si ha

$$\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x = x^2 e^x - 2x e^x + e^x + C$$

essendo $\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$.

- Nel caso di $\int x^n e^x \mathrm{d}x$ occorre quindi ripetere n volte il procedimento di integrazione per parti sino a ritrovare $\int e^x \mathrm{d}x$.

Esempio 10. Calcolare

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x$$

Ponendo $u = \ln x$ e $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$ risulta $\mathrm{d}u = 1/x$ e

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = x \ln x - \int \frac{x\mathrm{d}x}{x} = x \ln x - x + C$$

- Spesso si utilizzano piú tecniche contemporaneamente.

Esempio 11. Calcolare

$$\int e^{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$$

Ponendo $\sqrt{x} = t$ è $x = t^2$ e $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Allora

$$\int e^{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \int 2t\, e^t \mathrm{d}t = 2e^t(t-1) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)$$

- Integrali del tipo

$$\int \frac{1}{(x+a)^m (x+b)^n \cdots (x+d)^p} \,\mathrm{d}x$$

si trasformano integrali piú semplici

$$\int \left(\frac{A_1}{(x+a)} + \frac{A_2}{(x+a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x+a)^m} + \right.$$
$$+ \frac{B_1}{(x+b)} + \frac{B_2}{(x+b)^2} + \ldots + \frac{B_m}{(x+b)^n} +$$
$$\left. + \frac{D_1}{(x+d)} + \frac{D_2}{(x+d)^2} + \ldots + \frac{D_p}{(x+d)^p} \right) \mathrm{d}x$$

Esempio 12. Calcolare

$$\int \frac{2x}{(x-1)(x+1)} \, \mathrm{d}x$$

Ponendo

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

risulta

$$2x = A(x+1) + B(x-1) \quad \text{cioè} \quad 2x = x(A+B), \quad A - B = 0$$

quindi $A = B = 1$. Allora

$$\int \frac{2x}{(x-1)(x+1)} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1} \, \mathrm{d}x + \int \frac{1}{x+1} \, \mathrm{d}x$$
$$= \ln(x-1) + \ln(x+1) + C$$

Aree approssimate

ll calcolo dell'area sotto il grafico di una funzione si risolve non appena si conosca la primitiva della funzione da integrare. Spesso accade però che questa non sia elementarmente calcolabile, oppure, come nel caso di dati sperimentali, semplicemente non abbia senso parlarne. Una *stima* dell'area si ottiene scomponendo l'intervallo $[a, b]$ in intervalli di uguale ampiezza $h = (b - a)/n$. Questa suddivisione individua $n+1$ punti (x_i, y_i) con $i = 0, \ldots, n$, allora $x_0 = a$, $x_n = b$. L'area sotto il grafico viene approssimata dalla somma delle aree di n trapezi rettangoli. Allora:

$$\begin{aligned} S_1 &= \tfrac{1}{2}\,(y_0 + y_1) \cdot h \\ S_2 &= \tfrac{1}{2}\,(y_1 + y_2) \cdot h \\ S_3 &= \tfrac{1}{2}\,(y_2 + y_3) \cdot h \\ \ldots &\quad \ldots \\ S_n &= \tfrac{1}{2}\,(y_{n-1} + y_n) \cdot h \end{aligned}$$

Nei fatti, all'andamento della curva si sostituisce la spezzata per i punti (x_i, yi). È $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$. Si raccoglie h e notando che i termini y_1, $y_2, \ldots, y_{n-1}$ compaiono ciascuno *due* volte nella somma, si scrive:

$$\begin{aligned} S &= h\left(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n\right) \\ &= \frac{b-a}{n}\left(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n\right) \end{aligned}$$

Questo metodo, detto dei *trapezi*, si applica anche a curve date per punti $P_i(x_i, y_i)$, ottenuti dalla misura di un fenomeno ed egualmente spaziati sull'asse X.

Esempi

Esempio 13. Si calcola l'area del quarto di cerchio di raggio $r = 1$ con il metodo dei trapezi. È $y = \sqrt{1-x^2}$ con $0 \le x \le 1$. Si prendono 6 punti: $(h = 0.2)$

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x_i)$	1.0	$\sqrt{0.96} \approx 0.98$	$\sqrt{0.84} \approx 0.92$	0.8	0.6	0.0

L'area approssimata vale

$A = 0.2 \cdot (0.5+0.98+0.92+0.8+0.6) = 0.76$, ovvero $\pi \approx 3.04$, con un errore del -3%.

• Dalla figura si comprende come l'errore dipenda in massima parte dalla (cattiva) approssimazione della circonferenza nell'intervallo $(0.8, 1)$ dove è massima anche la variazione Δy rispetto a Δx $(0.6/0.2 = 3)$.

Esempio 14. Si calcola con il metodo dei trapezi l'area sotto la parabola $y = x^2$ tra 0 e 1. Si sa che quest'area vale esattamente 1/3. Si prendono 11 punti:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_i	0.00	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1.00

L'area vale:

$A = 0.1 \cdot (0.5 + 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25 + 0.36 + 0.49 + 0.64 + 0.81) = 0.335$, con un errore relativo inferiore all'1%.

Approssimando a tratti una curva qualsiasi con segmenti di parabola si ottengono risultati piú accurati a spese di una non eccessiva complicazione dei calcoli

Integrali impropri

Spesso accade che sia necessario calcolare l'integrale

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

in cui uno o entrambi gli estremi di integrazione sono $\pm\infty$. Ad esempio,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int_1^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Analogamente accade la funzione $f(x)$ sia illimitata in uno degli estremi di integrazione. Ad esempio,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Se $f(x)$ è integrabile e, detta $F(x)$ la primitiva

$$\lim_{x\to c} F(x) = \ell \quad \text{esiste ed è finito}$$

dove c è il punto in cui $f(x)$ è illimitata oppure è uno dei segni $\pm\infty$, allora l'*integrale improprio* converge. Un criterio per stabilire la convergenza di $\int f(x)$ è confrontare $f(x)$ con una funzione $g(x)$ di cui si conosce la convergenza o meno: se $f(x) \leq g(x)$ e $\int g(x)$ converge, allora anche $\int f(x)$ converge. Viceversa, se $f(x) \geq g(x)$ e $\int g(x)$ diverge, allora anche $\int f(x)$ diverge.

Esempi

Esempio 15. L'integrale

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^b$$

converge perchè

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

L'integrale vale allora $-(0-1) = 1$.

Esempio 16. L'integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-x}\,\mathrm{d}x = -\lim_{b\to\infty} \left[e^{-x}\right]_0^b$$

converge perchè

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$

L'integrale vale allora $-(0-1) = 1$.

Esempio 17. L'integrale

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

converge perchè

$$e^{-x^2} \le e^{-x} \quad \text{per} \quad x \ge 1$$

e l'integrale dell'esempio (2) converge.

Esempio 18. L'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\left[\sqrt{x}\right]_0^1 = 2$$

converge perchè

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$$

Esempio 19. L'integrale

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{b\to 0}\int_b^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln x]_b^1$$

diverge perchè

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$$

Esempio 20. L'integrale

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{b\to\infty}[\ln x]_1^b$$

diverge perchè

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

Serie numeriche

La serie numerica

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

si dice *convergente* se la *somma parziale*

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

ha limite per $n \to \infty$. Il numero $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ è detto *somma* della serie, mentre il numero

$$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$$

si chiama *resto* della serie. Se il limite non esiste la serie si dice *divergente*. Perché la serie converga occorre che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ma questa è solo una condizione necessaria.

Esempi

Esempio 1. La serie armonica

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge come si dimostra osservando che

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} &> 2\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} &> 4\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{16} &> 8\tfrac{1}{16} = \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2^n+1} + \ldots + \tfrac{1}{2^{n+1}} &> 2^n\tfrac{1}{2^{n+1}} = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

e ciascun raggruppamento di 2^n termini è maggiore di $1/2$. Basterà quindi collezionarne un certo numero per superare un numero m comunque fissato. Quindi la serie armonica diverge.

Esempio 2. La progressione geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\, q^n \quad (c \neq 0)$$

converge per $|q| < 1$ e diverge per $|q| \geq 1$. Infatti

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

e passsando al limite per $n \to \infty$ è

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$$

Ad esempio, la progressione geometrica di ragione $1/2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-1/2} = 2$$

converge al valore 2.

Criteri di convergenza

Un criterio ampiamente usato è quello del *confronto*. Se si riesce a stabilire che per una serie $S = \sum s_n$, almeno da un certo $n = k$ in poi, è $0 \leq s_n \leq c_n$ e la serie $C = \sum c_n$ converge, allora anche la serie S converge. Di converso, se una serie S, almeno da un certo n_0 in poi, è maggiore termine a termine di una serie divergente D, allora anche la serie S diverge. A tale scopo sono utili come serie-campione, le serie geometrica e armonica appena viste.

Esempio 3. La serie

$$\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \ldots + \frac{\ln n}{n} = \ldots$$

diverge perché per $n \geq 3$ è $\dfrac{\ln n}{n} > \dfrac{1}{n}$, che è il termine generico della serie armonica (divergente).

Esempio 4. La serie

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \ldots$$

converge perché per $n \geq 2$ è minore termine a termine della serie geometrica convergente

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Un altro criterio confronta il limite del rapporto tra la serie data e una serie certamente convergente. Se esiste finito e diverso da 0 il limite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ (in particolare se il limite vale 1) le serie convergono o divergono simultaneamente.

Esempio 5. La serie

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \ldots$$

diverge perché

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n-1} \Big/ \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}$$

e la serie armonica diverge.

Esempio 6. La serie

$$\frac{1}{2-1}+\frac{1}{2^2-2}+\frac{1}{2^3-3}+\ldots+\frac{1}{2^n-n}+\ldots$$

converge perché

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n-n}\Big/\frac{1}{2^n}\right)=1$$

e la serie $\sum 1/2^n$ converge.

Criterio di D'Alembert. Sia $a_n>0$ da un certo n in poi. Se esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$$

ed è $q<1$, la serie converge, mentre se $q>1$ la serie diverge; niente si può dire se $q=1$.

Esempio 7. La serie

$$\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}+\ldots$$

converge in forza del criterio di D'Alembert perché

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)(3n+2)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)(4n+1)}\Big/\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-1)}\right)=\frac{3}{4}$$

Criterio di Cauchy. Almeno da un certo n in poi sia $a_n\geq 0$ ed esista il limite

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$$

Allora se $q<1$ la serie converge, mentre se $q>1$ la serie diverge; la questione rimane irrisolta se $q=1$.

Esempio 8. La serie

$$\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+\ldots$$

converge in forza del criterio di Cauchy perché

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n-1}=1/2<1$$

Confronto con un integrale. Se il termine a_n coincide con il valore $f(n)$ di una funzione continua positiva e monotona decrescente per $x \geq 1$, allora la serie e l'integrale

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

convergono o divergono contemporaneamente.

Esempio 9. L'integrale

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^\infty = 1$$

converge, cosí come la serie

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$$

che è un caso particolare della serie di Dirichlet

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$$

convergente per $p > 1$, divergente per $p \leq 1$.

Serie a termini con segno alterno

Se la serie

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \tag{2}$$

formata prendendo il valore assoluto di ciascun termine della serie

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{3}$$

converge, allora quest'ultima converge[1] e si dice *assolutamente convergente*. Si possono applicare alla serie formata con i valori assoluti della serie a segni alterni i criteri appena visti per le serie a termini positivi; in particolare la serie converge se

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1, \quad \text{oppure} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

Se la serie formata con i valori assoluti diverge, ciò non implica che la serie a segni alterni diverga, ma se $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ oppure $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, allora la serie certamente diverge.

---

[1] A maggior ragione, poiché $\sum a_n \leq \sum |a_n|$.

Esempio 10. La serie

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$$

converge assolutamente perché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Criterio di Leibniz. Se per la serie a termini alterni

$$b1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots \quad (b_n \geq 0)$$

vale $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots \geq b_n \geq \ldots$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, allora la serie converge e il suo resto vale $|R_n| \leq b_{n+1}$.

Esempio 11. La serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$$

converge perché le condizioni del criterio di Leibniz sono soddisfatte. La serie si dice *semiconvergente* perchè la serie armonica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

diverge.

Serie di funzioni

L'insieme di valori della variabile $x \in \mathbf{R}$ per cui la serie

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \tag{4}$$

converge, si chiama *campo di convergenza* della serie.

Se $S_n(x) = f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$ e x appartiene al raggio di convergenza, la funzione

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

si chiama *somma* della serie, mentre $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ ne è il *resto*. Per stabilire il campo di convergenza della serie (4) basta applicare i criteri di convergenza comportandosi come se x fosse un valore assegnato.

Esempio 12. Determinare il campo di convergenza della serie

$$\frac{x+1}{1\cdot 2}+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{(x+1)^n}{2\cdot 2^n}+\ldots$$

Si applica direttamente il criterio di D'Alembert

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n2^n|x+1|^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}|x+1|^n}\right|=\frac{|x+1|}{2}$$

Per il criterio di D'Alembert la serie converge quando $|x+1|/2<1$, cioè per $-3<x<1$, in $x=1$ diventa la serie armonica (diverge), per $x=-3$ si ha la serie $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots$ semiconvergente; all'esterno dell'intervallo, cioè per $x<-3$ e $x>1$ la serie diverge.

Esempio 13. Determinare il campo di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

Applicando direttamente il criterio di D'Alembert si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right|=|x|$$

Deve essere $|x|<1$, cioè $-1<x<1$. Agli estremi dell'intervallo le serie $-1+1-1+\ldots$ e $1+1+\ldots$ divergono.

Serie di potenze

Per ogni *serie di potenze*

$$b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\ldots++b_n(x-a)^n+\ldots \tag{5}$$

esiste un intervallo $|x-a|<R$ con centro $x=a$ al cui interno la serie converge assolutamente, mentre diverge per $|x-a|>R$; negli estremi $x=a\pm R$ la serie può convergere o divergere. Il raggio di convergenza può essere ∞, nel qual caso la serie converge su tutto l'asse reale.

Per trovare il *raggio* di convergenza R si usano i criteri di D'Alembert e Cauchy applicati ai termini della serie presi in valore assoluto, ottenendo le formule

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|b_n|}},\qquad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|$$

Ma spesso le formule risultano inapplicabili perché i limiti appena visti risultano impossibili da calcolare; conviene allora ricorrere direttamente ai criteri di Cauchy e D'Alembert.

Esempio 14. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n}$$

converge con raggio di convergenza

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{n \cdot 2^n} = 2$$

cioè nell'intervallo $-1 < x < 3$. Per $x = -1$ diviene $-1 + 1/2 - 1/3 + 1/4 + \ldots$, a segni alterni e $a_n \to 0$, convergente; per $x = 3$ diviene $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots$, la serie armonica, divergente.

Convergenza uniforme

La serie (4) converge *uniformemente* su un intervallo se, per qualunque $\epsilon > 0$, si può trovare un N indipendente da x, tale che per $n > N$ e per ogni x dell'intervallo dato sia soddisfatta la disuguaglianza

$$|R_n(x)| < \epsilon$$

Criterio di Weierstass

Se nell'intervallo $a \le x \le b$ è $|f_n(x)| \le a_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$ e la serie numerica $\sum a_n$ converge, allora la serie (4) converge assolutamente e uniformemente.

La serie di potenze (5) converge assolutamente e uniformemente all'interno dell'intervallo $a - R < x < a + R$ di convergenza. È possibile derivare e integrare termine a termine la serie (5) su ogni segmento $[x_1, x_2]$ interno all'intervallo di convergenza. Ossia, se

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + +b_n(x-a)^n + \ldots$$

allora per $a - R < x < a + R$ è

$$f'(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + \ldots + nb_n(x-a)^{n-1} + \ldots$$

e per $a - R < x_1, x_2 < a + R$

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{x_1}^{x_2} b_0\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} b_1(x-a)\,\mathrm{d}x + \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} b_2(x-a)^2\mathrm{d}x + \ldots + \int_{x_1}^{x_2} b_n(x-a)^n\mathrm{d}x + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{(x_2-a)^{n+1}(x_1-a)^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

Serie di Taylor

Se la funzione $f(x)$ ammette, in un intorno $|x-a|<R$ del punto $x=a$ uno sviluppo in serie di potenze di $x-a$,

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \\ + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n + \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

si chiama *serie di Taylor* della funzione $f(x)$. Se $a=0$ la serie si chiama serie di Mclaurin.

L'eguaglianza (6) è valida se per $|x-a|<R$ il *resto* della serie di Taylor

$$R_n(x) = f(x) - \left[f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k \right] \quad \rightarrow \quad 0$$

per $n \to \infty$. Il resto può essere valutato con la formula

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta_n(x-a)] \tag{7}$$

dove $0 < \theta_n < 1$, dovuta a Lagrange.

Esempio

Le derivate di $f(x) = \sin x$ sono

$$f' = \cos x, \quad f'' = -\sin x \quad f^{(3)} = -\cos x \quad f^{(4)} = \sin x = f(x)$$

Ponendo $a=0$ si ha

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0 \quad f^{(3)}(0) = -1 \quad f^{(4)} = 0$$

e dallo sviluppo di $\sin x$ spariscono i termini pari (perché ?). Per la formula (6) è quindi

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad n \geq 0 \tag{8}$$

Per determinare il raggio di convergenza R dello sviluppo usiamo il criterio di D'Alambert.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Big/ \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{2n(2n+1)} = 0 \quad \forall x$$

Il resto calcolato con la (7) è

$$R_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\theta(x), \quad \theta(x) < 1$$

e

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \theta(x) \le \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| = 0$$

poiché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \text{per qualunque } x$$

Quindi la somma della serie (8) è uguale a $\sin x$ per ogni x.

Con analoghi calcoli si trovano gli sviluppi fondamentali

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad |x| < 1$$

Utilizzando questi sviluppi e la serie geometrica $\sum x^n$, convergente per $|x| < 1$, si ricavano gli sviluppi in serie di Taylor per molte funzioni.

Serie di Fourier

Se nell'intervallo $-\pi < x < \pi$ (preso come intervallo-base) una funzione $f(x)$ soddisfa le condizioni di Dirichlet, ossia

1) è limitata, cioè $|f(x)| \le M$, M costante;

2) ha un numero finito di discontinuità del primo tipo, cioè punti ξ per cui il limite destro è diverso dal limite sinistro;

3) ha un numero finito di punti di estremo (massimi/minimi)

allora si può sviluppare in *serie di Fourier* nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, cioè si scrive

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{a_0}{2} &+ a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots \\ &+ a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots \end{aligned} \tag{9}$$

dove i numeri a_n, b_n sono i coefficienti di Fourier calcolati come

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, \mathrm{d}x \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, \mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Se α è un punto di discontinuità di $f(x)$ allora la somma $S(\alpha)$ della serie è la media dei limiti destro e sinistro di $f(x)$:

$$S(\alpha) = \tfrac{1}{2}\big[f(\alpha^-) + f(\alpha^+)\big]$$

Analogamente negli estremi dell'intervallo, cioè per $\alpha = \pm\pi$.

$$S(-\pi) = S(\pi) = \tfrac{1}{2}\big[f(-\pi^+) + f(\pi^-)\big]$$

Esempio 15. La funzione $\sin(1/x)$ in $[-\pi, \pi]$ non può essere sviluppata in serie di Fourier perché in prossimità di $x = 0$ ha una infinità di massimi/minimi.

Esempio 16. Si definisce la funzione a scalino unitario $H(x)$, detta di *Heavside*, come

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

La funzione $H(x)$ ha quindi una discontinuità finita in $x = 0$, mentre in generale la funzione $H(x - x_0)$ ha una discontinuità finita in $x = x_0$. Allora la funzione $f(x) = H(x) - H(x-1)$ definita in $[-2, 2]$, si può sviluppare in serie di Fourier poiché limitata e con due discontinuità finite,.

Esempio 17. La funzione

$$f(x) = \frac{1}{2 - x^2} \quad \text{definita in} \quad [-\pi, \pi]$$

non si può sviluppare in serie di Fourier perché ha discontinuità infinite in $x = \pm\sqrt{2}$.

Se la funzione $f(x)$ è pari, cioè $f(-x) = f(x)$, allora i coefficienti

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

e

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

mentre se $f(x)$ è dispari, cioè $f(-x) = -f(x)$

$$a_n = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Se $f(x)$ soddisfa le condizioni di Dirichlet nell'intervallo $[-c, c]$ di ampiezza $2c$, con la dilatazione $x \to x\pi/c$ si ottiene la serie di Fourier di $f(x)$ in $[-c, c]$ come

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{\pi x}{c} + b_1 \sin\frac{\pi x}{c} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{c} + b_2 \sin\frac{2\pi x}{c} + \\ + \ldots + a_n \cos\frac{n\pi x}{c} + b_n \sin\frac{n\pi x}{c} + \ldots$$

Esempio 18. Espandere in serie di Fourier la funzione

$$f(x) == 2H(x) - 1 = \begin{cases} -1 & \text{per } -\pi < x \le 0 \\ 1 & \text{per } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Si tratta di una funzione *dispari*, quindi $a_n = 0$, $\forall n$. Si ha

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-1) \sin nx \, \mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1 \sin nx \, \mathrm{d}x$$

Gli integrali $\displaystyle\int_0^\pi \sin nx \mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{-\pi}^0 \sin nx \mathrm{d}x$ valgono $2/n$ e rispettivamente $-2/n$ se n è dispari, zero se n è pari. Sostituendo $n \to 2n+1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, si ha

$$b_n = \frac{4}{\pi}$$

Lo sviluppo di Fourier per la funzione a scalino (*onda quadra*) è

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

Nell'origine è $f(0) = (-1+1)/2 = 0$. Analogamente nei punti $x = \pm\pi$, estremi dell'intervallo $(-\pi, \pi)$.

Esempio 19. Espandere in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = x \quad \text{definita in} \quad [-\pi, \pi]$$

Ancora una funzione *dispari*, quindi $a_n = 0$, $\forall n$. Si ha

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \sin nx \, \mathrm{d}x$$

perché $x \sin x$ è una funzione pari. Integrando per parti

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{-x\cos nx}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx \, \mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{2}{\pi}(-1)^{n-1}\frac{\pi}{n} = (-1)^{n-1}\frac{2}{n} \end{aligned}$$

Allora

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$$

Esempio 20. Espandere in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = x^2 \quad \text{definita in} \quad [-\pi, \pi]$$

La funzione è *pari*, allora $b_n = 0$, $\forall n$; è quindi

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3} \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{4}{n\pi}\left(\left[\frac{-x\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right) = \frac{4(-1)^n}{n^2}
\end{aligned}$$

Quindi la serie di Fourier è

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$$

Per $x = 0$ la serie converge al valore della funzione nel punto e allora

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

Per $x = \pi$ la serie converge al valore della funzione nel punto e allora

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$